Årg. 41:4 Dec. 1958

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

FJÄRDE HÄFTET

Sune Berndt, Luftmotståndet vid flygning II 249

Stig Anvill och Per M. Carlberg, Moderna magnetiska material II 261

Bertil Englund, Formler, symboler och modeller i elementär kemiundervisning 271

O. Lindstad, Egenskaper ved kjeglesnitts-tangenten 281

Conrad Lönnqvist, Tangentteoremet 283

Bokanmälningar: Alger, Mathematics for Science and Engineering; Atkin, Mathematics and Wave Mechanics; Smith/Salkover/Justice, Calculus; Hemmerling, College Plane Geometry; Eggleston, Problems in Euclidean Space; Churchman/Ackoff/Arnoff, Introduction to Operations Research; Operations Research for Management; Operationsanalysen och företagsledningen; A Comprehensive Bibliography on Operations Research; Luce/Raiffa, Games and Decisions; Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry; Morse, Queues, Inventories and Maintenance; Pollaczek, Problèmes stochastiques; Peck/Hazelwood, Queuing Tables; Bohr, Atomteori og Naturbeskrivelse; Bohr, Atomic Physics and Human Knowledge; Svensk Naturvetenskap: Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds årsbok, årg. X och XI; Siegbahn/Nilsson, Kärn- och elektronspinresonans; Jenkins/White, Fundamentals of Optics; Longhurst, Geometrical and Physical Optics; Sundorph/Jepsen, Fysik for seminarier; Jepsen/Hjerting, Fysiske skoleforsøg for seminarier; Cramer, Papierchromatographie; Thiel, Och det vart ljus; Storm, Gjutning; Hallendorff, Skärande bearbetning; Frey-Wyssling, Macromolecules in Cell Structure 284

Problemavdelning:
Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 301
Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen nov. 1958 304
Realexamen h.t. 1958: Provräkningar 310
Praktisk realexamen h.t. 1958: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laboratorieteknik, i beskrivande maskin- och byggnadslära 313

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (sid. 316 och annonsbladet vid sid. 261)

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget; Svenska Radio AB.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39, 40 och 41 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à 1:20, för 1953—1955 à 1:40, för 1956, 1957 och 1958 à 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Övriga särtryck: se t. ex. sept. h. Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm.

Att beakta

Prenumerationsavgiften för år 1959, kr 15:—, inbetalas å postgiro 52755. Observera bilagda portofria inbetalningskort, som medföljer försändelser till privata abonnenter. Till bibliotek, skolor, institutioner m. fl. har fakturor utsänts 22.11. 1958.

Av stor betydelse är att prenumeration göres redan i december. Härigenom försäkrar sig abonnenten om att erhålla marshäftet — som utkommer redan i februari — vid första utsändningen omedelbart efter tryckningen. Den andra utsändningen sker först i mitten av mars. En tidig inbetalning underlättar också red:s expeditionsarbete, som under senare år — med den stigande upplagan — ökat avsevärt.

Studerande vid universitet och högskolor erhåller tidskriften vid direkt prenumeration hos red. till ett pris av kr. 12:50. Hänvisning göres vid inbetalningen till studentkatalog. Se bifogade inbetalningskort. Även de elever (ett hundratal) vid läroverken som under 1958 mottagit tidskriften som premium kan erhålla årg. 1959 till kr. 12:50.

De nya skrivningstyperna i matematik

i studentex., som ges fr. o. m. mars 1957, finner Ni i »Problemhäfte 1957» och »Problemhäfte 1958» men även i »Problemhäfte 1956», som innehåller Skolöverstyrelsens »Övningsuppg. i matematik till studentexamen».

Problemhäfte 1958 med de under innevarande år givna uppg. i student- och realexamen beräknas utkomma 10.12. 1958.

För problemhäften 1956, 1957 och 1958 är priset 2:20 per häfte + 15 öre i porto.

Författare i detta häfte: civiling. S. Anvill, Surahammar; docent K.-B. Augustinsson, Stockholm; docent S. Berndt, Stockholm; fil. dr G. Blom, Malmö; bergsingenjör P. Carlberg, Surahammar; docent Aina Elvius, Uppsala; lektor B. Englund, Uppsala; lektor Th. Forsner, Gävle; lektor B. Grundström, Djursholm; lektor P. Häggmark, Göteborg; lektor T. Jönsson, Stockholm; lektor S. Lennander, Växjö; lektor O. Lindstad, Oslo; rektor E. Lunell, Skellefteå; lektor C. Lönnqvist, Södertälje; docent S. B. Nilsson, Lund; rektor A. Pleijel, Trollhättan; lektor L. Råde, Göteborg; docent E. Staffansson, Göteborg.

Bilagor: Lindståhls Bokhandel; Svenska Radio AB; Elementa inbetalningskort.

Fredrik Ehrnst

MATEMATIK

för reallinjens första ringar

RI⁴—RII⁴ och RI³

»Författaren har lagt ned ett utmärkt arbete på boken och åstadkommit en förtjänstfull lärobok.»

Ur sakkunnigutlåtandet till Statens läroboksnämnd

Inb. 11:75 (8:81)

Tidigare har utkommit:

Fredrik Ehrnst

MATEMATIK

för reallinjens biologiska gren

RII⁴—RIV⁴ och RII³—RIII³

- Samtliga kursmoment för realgymnasiets biologiska gren samlade i en enda lärobok
- Innehåller analytisk geometri och rymdgeometri, funktionslära och grunderna för matematisk statistik
- Illustrerad med ett stort antal figurer

Inb. 9:50 (7:13)

Beställ lärarex. genom att sätta in beloppet (pris inom parentes) på postgiro 758. Ange på talongen vad beställningen avser.

ALMQVIST & WIKSELL

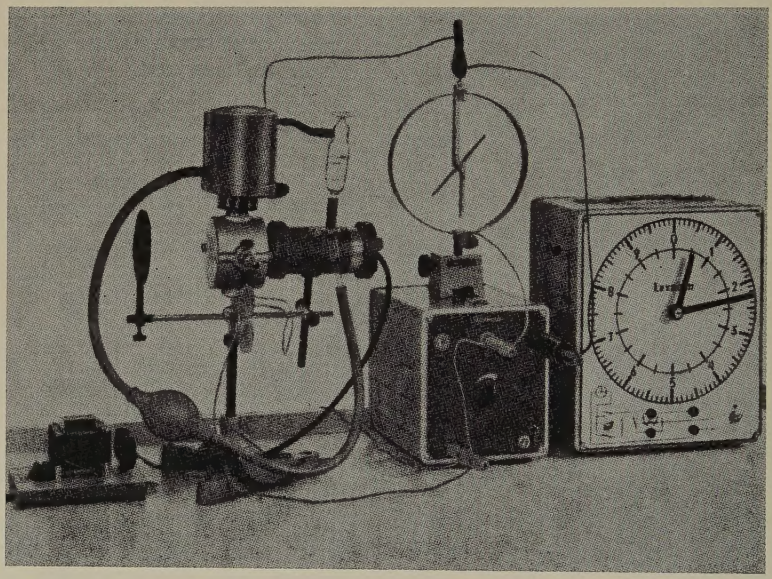
Box 159 — Stockholm 1 — Postgiro 758

AWE

LEYBOLD-APPARATER

för

KÄRNFYSIKALISKA FÖRSÖK



TORONS HALVERINGSTID
LAGEN OM RADIOAKTIVT SÖNDERFALL

Begär SPECIALPROSPEKT PH 35

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Box 3082, Malmskillnadsg. 48 c, Stockholm 3, Tel. 23 37 80
Box 4158, St. Nygatan 27 b, Malmö 4, Tel. 381 25

Luftmotståndet vid flygning II

Av docent Sune Berndt, Kungl. Tekniska högskolan, Stockholm

I uppsatsens första del* betraktades tre ur flygteknisk synpunkt viktiga typer av luftmotstånd: vågmotståndet, virvelmotståndet och gränsskiktsmotståndet. Denna klassificering utgick från mekanismen för energitransporten bort från flygplanet, och den gav vid handen, att vågmotstånd förekommer endast vid hög underljudfart och överljudfart, att virvelmotståndet intimt sammanhänger med lyftkraften och att gränsskiktsmotståndet uppträder vid alla machtal och flygtillstånd.

Tryckmotstånd och skjuvmotstånd

Närmast skall vi genomföra en helt annan klassificering, vilken likaledes är ägnad att ge insikter om luftmotståndets natur. Om man nämligen tänker sig alla de på små element av flygplanets yta verkande motstånden, så är det totala motståndet lika med summan av alla dessa små delmotstånd. Motståndet på ett ytelement kommer dels ifrån luftens tryck, dels ifrån skjuvspänningen i gränsskiktets innersta del. Trycket ger en mot ytelementet vinkelrät kraft, vilken har en komponent i flygriktningen, dvs. en motståndskomponent, såvida ej ytelementet är parallellt med flygriktningen. Skjuvspänningen ger en med ytelementet parallell kraft, vilken praktiskt taget ligger i flygriktningen och därför med full styrka bidrager till motståndet. Om man summerar var för sig dessa två typer av motståndsbidrag över flygplanets yta, så erhålles totalmotståndet som summan av två delar: *tryckmotståndet* och *skjuvmotståndet.*

Eftersom skjuvspänningen vid ytan beror på att luften har inre friktion, så ligger det nära till hands förmoda, att vågmotståndet och virvelmotståndet, vilka båda uppträder även utan viskositet, tillsammans utgör tryckmotståndet och att gränsskiktsmotståndet är identiskt med skjuvmotståndet. Så är också med god noggrannhet fallet.[12]

[12] Visserligen ändrar gränsskiktet något på tryckfördelningen, men samtidigt sker en motsvarande ändring av vågmotståndet. Detta är för övrigt i allmänhet en försumbar effekt, bl. a. därför att gränsskiktets tjocklek oftast är liten i jämförelse med vingens tjocklek. Att överensstämmelsen mellan vågmotstånd och tryckmotstånd inte är exakt, framgår å andra sida av att vid överljudfart en tjockleklös platta utan anfallsvinkel säkert har vågmotstånd, fastän den inte kan ha något tryckmotstånd.

* Se sept. h. 1958, s. 183—197.

En sådan analys av motståndet i lokala bidrag från tryck- och skjuvspänningsfördelningen ger en direkt uppfattning om hur olika delar av flygplanet bidrager till motståndet. Betrakta t. ex. gränsskiktsmotståndet. De tidigare givna formlerna (12) och (13) gäller för hela vingens friktionskoefficient C_f, men de ger också C_f för en godtycklig vid framkanten början del, om man i stället för hela kordlängden c i formlerna sätter in den betraktade vingdelens längd i flygriktningen. Därvid erhålles ett högre värde för C_f, eftersom Re blir mindre, och man drar alltså slutsatsen, att skjuvspänningen är störst vid vingframkanten och omedelbart bakom omslagspunkten.

Eller betrakta vågmotståndets fördelning över en vinge (utan pilform) vid överljudfart. Såsom antydes i fig. 10 a, har man övertryck mellan framkantstöten och vingens största tjocklek, medan undertryck råder på bakdelen. Det gäller med god approximation, att övertrycket (i förhållande till den ostörda strömningen) är proportionellt mot vingkonturens lutning (negativ på bakdelen). Men den motståndsproducerande komponenten av tryckkraften på ett ytelement erhålles genom multiplikation med en faktor som approximativt är lika med lutningen. Motståndsbidragen blir därför proportionella mot kvadraten på lutningen; de är tydligen störst längst fram och längst bak på vingen. En viktig följd härav är, att vågmotståndet ökar, då vingen ges anfallsvinkel, och att ökningen är proportionell mot anfallsvinkelns (lyftkraftens) kvadrat.

En annan och väl så viktig slutsats är, att vingens totala vågmotstånd är proportionellt mot kvadraten på förhållandet mellan tjockleken och kordlängden. Ett liknande resultat gäller för slanka kroppar, och det är därför en god tumregel, att ett flygplans vågmotstånd reduceras till fjärdedelen, då man minskar kroppens och vingens tjocklek till hälften. Detta förhållande antyddes redan i fig. 5 b.

Avlösningsmotstånd

Det entydiga sambandet mellan de två grupperna av motståndstyper kan störas av ett slags friktionsmotstånd, som vi ännu inte betraktat, nämligen det s. k. *avlösningsmotståndet.* Det händer, att den uppbromsade luften (från flygplanet sett) i gränsskiktet ytterligare bromsas genom rörelse mot ökande tryck, så att den till slut inte orkar följa kroppsytan. Gränsskiktet avlöser då, dvs. det lämnar kroppsytan, och bakom avlösningspunkten bildas ett område av oregelbunden, starkt virvlande strömning. Fig. 8 visar ett par exempel på avlöst strömning vid underljudfart, nämligen dels en på tvären anblåst platta, dels en fyllig vingprofil; kölvattnet efter en roddbåt förråder samma fenomen. Fig. 8 c visar ett typiskt avlösningsfenomen vid överljudfart. Tryckstegringen genom bakkantstöten fortplantar sig framåt genom låg-

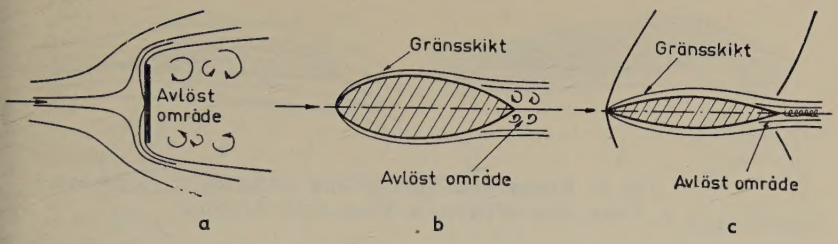
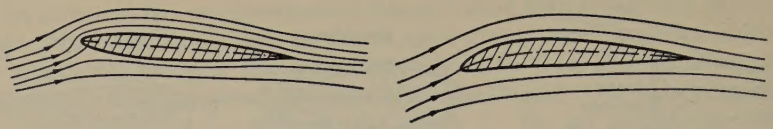


Fig. 8. Exempel på avlöst strömning: a. Platta vid underljudfart. b. Tjock vinge vid underljudfart. c. Vinge vid överljudfart.

hastighetsområdet närmast vingytan och avlöser gränsskiktet. Våra energibetraktelser antyder, att avlösning är förenad med motstånd (kölvattnet transporterar bort rörelseenergi), och eftersom avlösningen beror på att luften har inre friktion, så bör detta motstånd rätteligen kallas friktionsmotstånd. Det verkar emellertid väsentligen såsom tryckmotstånd. Vid de i fig. 8 givna exemplen beror avlösningsmotståndet på att trycket i det avlösta området är lägre än det skulle varit, om strömningen utan avlösning följt konturen hela vägen. Å andra sidan är skjuvspänningen på den del av ytan, som ligger inom det avlösta området, i allmänhet liten och kan för övrigt t. o. m. vara så riktad, att skjuvmotståndet blir negativt (det är naturligtvis noll för plattan i fig. 8 a). I överljudfallet, fig. 8 c, medför avlösningen emellertid en försvagning av bakkantstöten och därmed en minskning av det till bakkanten koncentrerade vågmotståndet. I sådant fall är även ändringen av tryckmotståndet genom avlösning liten och möjligen negativ.

Avlösningsmotståndet kan vara mycket stort vid underljudfart. Motståndet hos en på tvären anblåst cirkulär cylinder är mer än hundra gånger större än motståndet hos en väl utformad vinge med samma tjocklek. Trots detta spelar avlösningsmotståndet ingen större roll för flygplan (utom vid stora anfallsvinklar), vilket beror på att avlösning praktiskt taget helt kan förhindras genom att ge flygplanet lämplig form — »*strömlinjeform*». Denna innebär bl. a., att flygplanets yta bildar endast en liten vinkel mot flygriktningen, i synnerhet på den bakersta delen av kropp och vinge, och att ytans krökning i flygriktningen är liten och jämnt fördelad. Speciellt tillåtes inga från ytan utskjutande, fylliga detaljer, såsom landställ, stöttor och stag. Övergångarna mellan vinge, stabilisator etc. och kroppen göres väl avrundade. I princip: man ser till, att det inte förekommer några kraftiga (positiva) tryckgradienter i strömningsriktningen.

En för avlösning speciellt utsatt del av flygplanet är vingens fram-



a b

Fig. 9. Framkantströmning utan avlösning.
a. Vinge utan välvning. b. Vinge med välvning.

kant. Det är så, att luften omedelbart framför framkanten har en hastighetskomponent uppåt, vilket beror på att den lyftkraftsproducerande tryckskillnaden mellan under- och översidan sänder luft runt framkanten. Denna luft skall tvärt avlänkas över framkanten för att sedan följa vingens översida (se fig. 9 a), vilket kan ske endast genom ett starkt undertryck runt framkanten (så att centrifugalkraften på luften motverkas). Strax bakom framkantens översida, där avlänkningen har avslutats, stiger trycket åter, och det är denna tryckstegring som gör, att gränsskiktet avlöser från framkanten, då anfallsvinkeln blir tillräckligt stor. Ju mindre nosradie framkanten har, desto kraftigare blir tryckgradienten bakom undertrycket och vid desto mindre anfallsvinkel inträffar avlösningen.

Sedan avlösning inträffat, sker avlänkningen mindre abrupt, och inget nämnvärt undertryck utbildas på framkanten. Eftersom ytan under sugtoppen är riktad framåt, så bidrager den med ett negativt motstånd, vilket går förlorat, då undertrycket försvinner vid avlösning (dessutom kan lyftkraften minska). Den resulterande motståndsökningen kan vara av samma storleksordning som virvelmotståndet, och det är därför i vissa fall nödvändigt att eliminera framkantavlösningen. Detta kan åstadkommas genom att böja ner vingnosen (se fig. 9 b), så att den riktas parallellt med den ankommande strömningen. Avlänkningen av luften sker sedan mjukt över den del av vingen, som ligger omedelbart bakom nosen. Undertrycket blir därvid mindre och verkar över ett större område, så att den avlösningsproducerande tryckgradienten reduceras. Att eliminera framkantavlösningen genom att öka nosradien är ofta uteslutet, emedan det ger en tjockare vinge och därmed ökat vågmotstånd.

Framkantavlösningen är ett speciellt besvärande fenomen på pilvingar. Flera samverkande orsaker gör, att den längst ut mot vingspetsarna belägna delen av framkanten kan få avlösning redan vid anfallsvinklar som är mindre än 5°. Som framgår av fig 11, är det rätt extrem välvning av vingspetsen som erfordras för att i denna situation fördröja avlösningen.

Den beskrivna typen av framkantavlösning förekommer inte vid

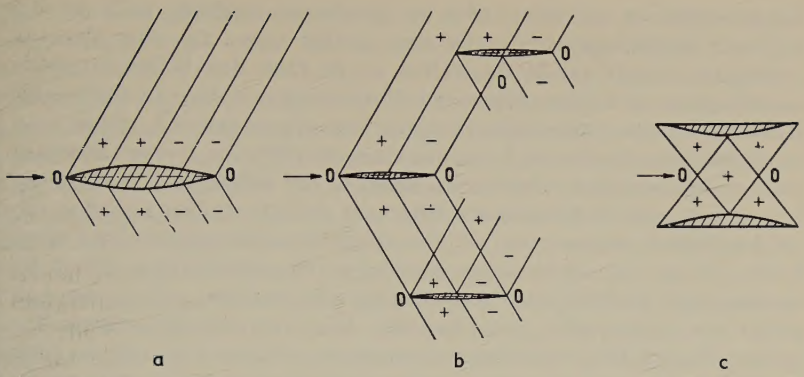


Fig. 10. Interferensmotstånd vid överljudfart (+ betecknar övertryck, — undertryck och 0 ostört tryck). a. Tryckfördelningen i omgivningen av en vinge. b. Det övre vingparet har negativt och det undre positivt interferensmotstånd. c. Vingpar utan vågmotstånd.

överljudfart, om framkantstöten börjar direkt vid framkanten såsom i fig. 10 a. Övertrycket på undersidan kan då inte fortplantas framåt mot den snabbare än ljudet strömmande luften och åstadkomma en omströmning av framkanten. Om däremot framkanten är mera bakåtsvept än machkonen (gör en skiss!), så kan tryckkommunikationen mellan vingens båda sidor äga rum och åstadkomma avlösning. Det är emellertid knappast befogat att i detta fall välva vingnosen, emedan vinsten av att eliminera avlösningen till stor del ätes upp av den ökning av vågmotståndet, som välvningen medför.

Interferensmotstånd

Det medför ofta principiella förenklingar att betrakta strömningen kring en ensam vinge, en ensam kropp, en ensam motorgondol etc. Då sådana element sammansättes till ett flygplan, påverkar de emellertid som regel varandras tryckfördelningar (man säger, att de interfererar med varandra). Speciellt gäller, att flygplanets vågmotstånd och avlösningsmotstånd kan vara väsentligt skilda från summan av de ensamma elementens vågmotstånd respektive avlösningsmotstånd. Flygplanets mermotstånd kallas *interferensmotstånd.*

Arten av detta interferensmotstånd demonstreras i fig. 10 i vad avser vågmotståndet. Den vänstra figuren visar schematiskt tryckfältet kring en vinge vid överljudfart. Det har nyss nämnts, att det råder övertryck på framdelen och undertryck på bakdelen. Vidare vet vi, att tryckstörningarna ändrar sig endast långsamt, då man rör sig utåt-

bakåt utefter en machlinje (dvs. en machkons skärning med det betraktade strömningsplanet). Om man därför som i fig. 10 b placerar ytterligare vingar så att de träffas av de från den första utgående machlinjerna, så kommer deras tryckfördelning och därmed deras motstånd att ändras. I den linjära vingteoriens approximation adderar sig tryckstörningarna direkt. I samma approximation är trycket konstant utefter den ensamma vingens machlinjer, om inflytandet från kropp och vingspetsar är försumbart. Eftersom det här endast är fråga om ett kvalitativt resonemang, så kan dessa förutsättningar antas uppfyllda. Vi ser då, att den översta vingens tryckfördelning störes på undersidans framdel; det ursprungliga övertrycket elimineras helt enkelt av undertrycket som kommer längs machlinjerna från den främre vingen. Den övre vingens motstånd reduceras därigenom med en fjärdedel (negativt interferensmotstånd). Den undre vingens tryckfördelning störes på hela översidan, varvid övertrycket resp. undertrycket fördubblas. Den undre vingens motstånd ökas således med hälften (positivt interferensmotstånd).

Man kan tydligen uppnå betydande motståndsvinster genom att utnyttja interferensen. I själva verket kan vågmotståndet under vissa förhållanden reduceras ända till noll (men ej lägre!). Fig. 10 c visar ett exempel härpå. Vingparets yttersidor är plana och parallella med strömningsriktningen; från dem utgår därför inga störningar med energi till oändligheten. Insidorna är så utformade, att tryckstörningen från den ena vingen träffar den andra i en punkt, där lutningen är lagom för att producera en utsläckande tryckstörning. Som följd därav utgår inte heller från vingarnas insidor några störningar till oändligheten. Vågmotståndet är således noll. Det bör emellertid noteras, att detta gäller endast vid ett visst machtal; vid andra machtal löper machlinjerna inte på det skisserade sättet, och i allmänhet slipper då störningar ut till oändligheten genom den bakre öppningen mellan profilerna. Profilparets motståndskoefficient kommer därigenom att variera kraftigt med machtalet (detsamma gäller naturligtvis också för de i fig. 10 b visade fallen).

Vi kan nu formulera en tumregel för motståndsminskning genom interferens: »Man bör placera flygplanets delar (vinge, kropp, motorgondoler etc.) så i förhållande till varandra att machkonerna från ytelement som lutar mot strömningen träffar ytelement som lutar från strömningen och vice versa.» — Övertrycken kommer därigenom att hamna på ytor där de pressar fram flygplanet och undertrycken där de suger fram flygplanet. Om ett sådant arrangemang ej går att konsekvent genomföra, bör man i varje fall undvika att övertrycken hamnar på ytor som lutar mot strömningen och omvänt.

Låt oss tillämpa tumregeln på en pilvinge (t. ex. en sådan vinge som

i fig. 6 med en profilform som i fig. 10 a) och betrakta interferensen mellan vingens olika delar (mellan yttervinge och innervinge, framkant och bakkant etc.). På vingens framkant lutar ytelementen mot strömningen; det gäller i första hand att undvika att övertrycket där via machlinjerna i vingytan breder ut sig över framkanten från innervingen till yttervingen (gör några typiska skisser med olika vingformer och machvinklar!). Vid bakkanten, som lutar från strömningen, gäller motsvarande. Det gäller med andra ord att undvika att vingframkanten och vingbakkanten är parallella med machlinjerna. Detta kan ske genom att antingen öka pilvinkeln, så att vingen blir spetsigare än machkonen, eller minska den till noll (rak vinge).[13] Deltavingen (se fig. 2 och 11) kan betraktas som ett mellanting, där framkanten är spetsigare och bakkanten trubbigare än machkonen. Man skulle nu våga gissa att vid låg överljudfart, där machkonen är trubbig, pilvingen ger störst motståndsvinst,[14] och att den raka vingen kommer till heders vid hög överljudfart, där tillräckligt stora pilvinklar är svåra att åstadkomma av hållfasthetsskäl. Den sista svårigheten bortfaller emellertid för deltavingar, som därför kan vara med i konkurrensen även vid hög överljudfart.

Nu måste kroppen anpassas efter vingen. Vår tumregel antyder att kroppsytan bör dras in där den träffas av övertryck från vingen och läggas ut där den träffas av undertryck. Vid låg överljudfart blir den resulterande formen kanske som den i fig. 6 visade, med en midja på kroppen ungefär mitt för vingen. Hur en sådan motståndsreducerande kroppsmidja ter sig i verkligheten framgår av fig. 11. Denna har då naturligtvis inte tillkommit genom frihandsteckning av vårt slag utan är resultatet av omfattande beräkningar och experiment (varvid också interferensen från och på motorgondolerna och fenan beaktats).

Själva principen för reducering av interferensmotstånd vid överljudfart är alltså nog så enkel, och den kvantitativa teori den leder till är även den ganska enkel. Teorien ifråga upphör emellertid att gälla när man kommer ner i det transoniska machtalsområdet (där det ju också finns vågmotstånd), och av denna anledning bortsåg man från dess resultat (frånsett fördelen med pilvinge) tills för ett fåtal år sedan. När man slutligen löste problemet att reducera det transoniska vågmotståndet[15] så visade sig lösningen ironiskt nog vara identisk med

[13] Framåtsvepta vingar är otillfredsställande ur hållfasthetssynpunkt.

[14] Redan 1935 påpekade A. BUSEMANN i Göttingen att en vinges vågmotstånd vid överljudfart kan reduceras genom att ge den pilform, men detta föll utanför Tyskland i glömska ända tills det i slutskedet av andra världskriget visade sig att tyskarna hade pilvingade *underljud*flygplan med överlägsna fartprestanda. Idén att använda pilform även vid underljudfart tillskrives A. BETZ i Göttingen.

[15] Lösningen erhölls 1952 av K. OSWATITSCH tillsammans med F. KEUNE

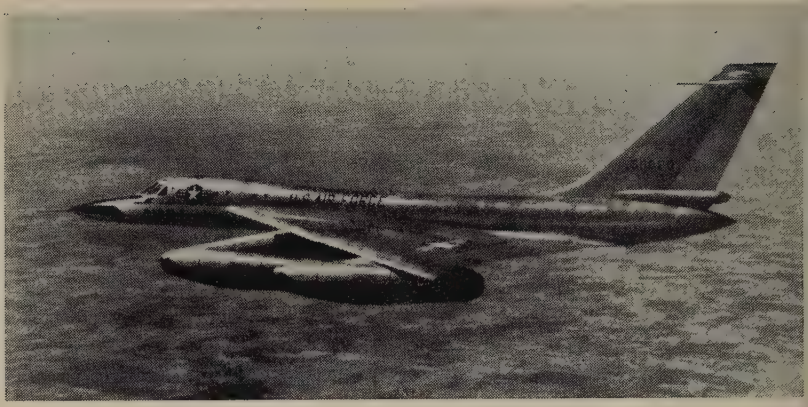


Fig. 11. Bombflygplan typ Convair B-58 »Hustler» för hög underljudfart och måttlig överljudfart. Prototyp färdig 1956.

den otillämpliga överljudteoriens lösning, vilken till på köpet i detta specialfall ($M=1$) hade en enklare form än vid överljudfart. Man kom fram till följande enkla regel, kallad *arearegeln*: »För att i görligaste mån reducera ett flygplans vågmotstånd i det transoniska området skall man utforma det så att dess tvärsnittsyta (dvs. ytan av flygplanets genomskärning i ett plan $x=$konstant i fig. 4) i varje snitt överensstämmer med tvärsnittsytan hos en tänkt möjligast slanka och strömlinjeformade rotationskropp, vars vågmotstånd man vet är litet (flygplanets och rotationskroppens vågmotstånd är då ofta med god approximation lika).»

Man ser hur direkt denna regel leder till kombinationen av pilvinge med midjeförsedd kropp och inser hur lätt den tillåter att man tar hänsyn till interferens från fena, motorgondoler m. m. Att den står i överensstämmelse med tumregeln för överljudfart övertygar man sig också lätt om genom att beakta att machlinjerna i det transoniska området står nästan vinkelrätt mot strömningsriktningen.

Mycket mera skulle kunna sägas om interferensmotstånd, t. ex. i samband med luftintag för motorer. Dessa måste å ena sidan förse motorn med en väl avvägd luftström vid alla flygtillstånd men får å andra sidan inte nämnvärt öka flygplanets motstånd. Härav följer mycket

(då verksamma vid Kungl. Tekniska högskolan i Stockholm) på teoretisk väg och, oberoende därav, av R. T. WHITCOMB (vid den statliga flygtekniska forskningsinstitutionen NACA i USA) på övervägande experimentell väg. Det amerikanska resultatet hölls emellertid hemligt ända fram till 1955.

svårbemästrade formgivningsproblem, vilka vid högre överljudmachtal kan lösas endast genom att göra luftintaget ställbart, så att dess form kan varieras med machtalet. Utrymmet tillåter emellertid inte att vi går närmare in härpå. Detsamma gäller interferensmotstånd i samband med avlösning, t. ex. i övergången mellan vinge och kropp.

Motstånd och form

För att till slut exemplifiera hur strävan att minska luftmotståndet kommer till uttryck i flygplanets form får vi här utföra en enkel prestandaanalys. För enkelhetens skull väljer vi att betrakta följande problem: hur skall formen väljas för att ett flygplan av given tyngd vid givet konstant machtal skall kräva minsta möjliga framdrivningskraft i horisontalflykt? I detta flygtillstånd är motståndet D lika med framdrivningskraften och lyftkraften L lika med tyngden. Det gäller således att välja formen så att förhållandet L/D blir så stort som möjligt.

Men om samma referensarea S användes i formlerna (1) och (5) så gäller

$$\frac{L}{D}=\frac{C_L}{C_D} \tag{14}$$

Enligt våra föregående överläggningar kan man vidare skriva

$$C_D=C_{DO}+C_{DL}\cdot C_L^2 \tag{15}$$

där C_{DO} är motståndskoefficienten då flygplanet inte har någon lyftkraft, och där den dimensionslösa koefficienten C_{DL} i sig sammanfattar alla motståndsbidragen från lyftkraften, dvs. virvelmotståndet (4), vågmotståndet på grund av lyftkraft och motståndstillskottet från framkantavlösning. De båda motståndsdelarna i (15) brukar kallas *nollmotstånd* och *lyftkraftsmotstånd.*

Om man bortser från den för snabba flygplan ganska obetydliga variationen av friktionsmotståndet med Reynolds tal, så kan C_{DO} och C_{DL}, för givet machtal, antas bero endast av flygplanets form (men ej av dess storlek!). En enkel maximiberäkning i avseende på C_L visar då att C_L/C_D uppnår sitt största värde

$$\varepsilon=\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}=\frac{1}{2\sqrt{C_{DO}C_{DL}}} \tag{16}$$

för $C_L=\sqrt{C_{DO}/C_{DL}}$. Därvid består motståndet till lika delar av nollmotstånd och lyftkraftsmotstånd. Den minsta framdrivningskraft som räcker för planflykt är tydligen tyngden dividerad med ε. Man kan därför säga, att ju större ε är, desto effektivare är flygplanet ur aerodynamisk synpunkt.

Man brukar kalla ε för flygplanets *bästa glidtal*,[16] emedan den minsta vinkel (i radianer) som flygplanets bana i glidflykt (utan motor) kan bilda med horisonten approximativt är lika med $1/\varepsilon$ (övertyga er härom med en skiss över kraftbalansen med iakttagande av att D och L verkar parallellt med resp. vinkelrätt mot banan). Man kan också uttrycka det så, att man i glidflykt kan nå en distans som är ε gånger större än höjdförlusten.

Betrakta först ren underljudfart. Nollmotståndet för ett väl utformat flygplan består då övervägande av gränsskiktsmotstånd, och lyftkraftsmotståndet övervägande av virvelmotstånd. Säg att flygplanets »våta» yta är $2S+S_0$ där S är ytan av vingen (dess e n a sida) och S_0 är ytan av övriga delar. Ur formlerna (4) och (8) erhålles (med $K=1/\pi$)

$$\left.\begin{aligned} C_{DO} &= \left(2+\frac{S_0}{S}\right)C_f \\ C_{DL} &= \frac{1}{\pi A} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Det inses omedelbart, att man förbättrar ε genom att öka spännvidden hos vingen, eftersom härvid S_0/S minskas och sidoförhållandet A ökas, så att både C_{DO} och C_{DL} minskas. I praktiken ges därför vingen så stort sidoförhållande som ur hållfasthets- och viktsynpunkt är rimligt. Trafikflygplan av typ Douglas DC-7 eller liknande har t. ex. sidoförhållanden av storleksordningen $A=10$, medan segelflygplan kommer upp i så extrema värden som $A=25$. Så stora sidoförhållanden som de nämnda möjliggöres av att vingarna har stor tjocklek, ofta mer än 10 % av kordan; tunnare vingar skulle ge hållfasthetsproblem.

I fallet DC-7 är kanske $S_0/S=1$ och $C_f=0{,}003$, vilket ger $\varepsilon=29$ vid $C_L=0{,}54$. Detta är säkert en optimistisk uppskattning, eftersom vi försummat en del motståndsbidrag, t. ex. från motorer, propellrar och yttre antenner, varför i praktiken ε torde ligga strax under 20. För högvärdiga segelflygplan med stort sidoförhållande kan värdet på ε passera 40. Man kan då glidflyga 4 mil med en utgångshöjd av 1000 m![17]

Vid överljudfart kommer vågmotståndet in i bilden. Nollmotståndskoefficienten C_{DO} för ett underljudflygplan kan utan vidare bli tio gånger större om det tvingas upp i överljudfart (t. ex. i en dykning).

[16] Det förekommer även att $1/\varepsilon$ kallas för glidtal, men den ovan införda terminologien är numera den vanligaste.

[17] Vid skidhoppning i stora backar avgöres hopplängden praktiskt taget helt av hopparens glidtal. Detta är naturligtvis synnerligen lågt; även i bästa fall är det förmodligen mindre än 1. Som jämförelse kan nämnas, att bästa glidtalet för en diskus kan vara så stort som 5,5.

Överljudflygplan har därför pilvingar med extremt liten tjocklek. Men av hållfasthets- och viktsskäl tvingas man då till ett litet sidoförhållande; det i fig. 11 visade planet har $A \approx 2{,}5$, och det i fig. 2 har ännu mindre värde på A. I sådana fall kan C_{DO} vid måttlig överljudfart få ungefär samma värde som vid underljudfart, varvid det kvarvarande vågmotståndet uppväges av att friktionskoefficienten minskar med ökande machtal. Lyftkraftsmotståndet blir emellertid mycket större än vid underljudfart. Genom minskningen av A från 10 till exempelvis 2,5 ökas virvelmotståndsbidraget till C_{DL} ungefär med en faktor 4. Bidraget från vågmotståndet är ungefär lika stort, varför slutresultatet blir ett åtta gånger större värde för C_{DL}. Bästa glidtalet blir således ungefär tre gånger mindre vid överljudfart än vid underljudfart. Detta betyder avsevärd ökning av bränsleförbrukningen och minskning av flygsträckan, och man kan därför förstå varför bombflygplanet i fig. 11 försetts med välvd framkant: anflygningen sker normalt med hög underljudfart, där framkantvälvningen eliminerar avlösningsmotståndet utan att ge något vågmotstånd, medan överljudfart användes endast då fiendens aktivitet så fordrar.

Det anses att de låga glidtalen vid överljudfart inte tillåter ekonomisk överljudflygning med passagerare. På längre sikt kan emellertid situationen ändras, dels genom att flygmotorer med lägre bränsleförbrukning kommer fram, dels genom att man kanske lyckas förbättra den aerodynamiska formgivningen därhän att lyftkraftsmotståndet reduceras till godtagbar nivå. En intensiv forskning bedrives för närvarande i båda dessa riktningar.

De passagerarflygplan som de närmaste åren kommer i trafik är jetdrivna underljudflygplan (t ex. av SAS beställda Douglas DC-8). Propellerflygplanens hastighet begränsas av att propellerbladens ytterdelar råkar ut för vågmotstånd redan vid ungefär $M=0{,}5$ (enär hastigheten mellan bladspetsarna och luften är väsentligt större än flyghastigheten). Först genom övergång till jetdrift blir höga underljudmachtal möjliga. Därvid måste vågmotstånd undvikas, vilket sker genom att införa moderat pilform och något minskad vingtjocklek. Vingen kan fortfarande ha ganska stort sidoförhållande, ehuru kanske något mindre än $A=10$. I själva verket blir glidtalet något bättre än som nu gäller för ett propellerdrivet plan med rak vinge, enär jetmotorer i allmänhet ger mindre motståndstillskott än propellermotorer.

Slutord

Det bör framhållas, att den diskussion som just genomförts något ensidigt uppehållit sig vid bästa glidtalet såsom mått på den aerodynamiska effektiviteten. Denna ensidighet är visserligen i viss mån

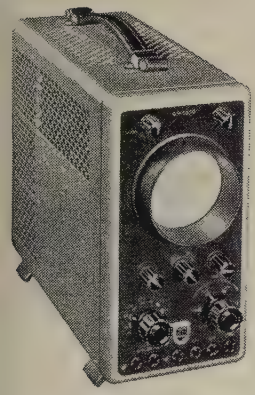
berättigad när stor räckvidd eftersträvas, som vid segelflygplan, och vid passagerarflygplan och bombflygplan för långa distanser, men vid andra typer av flygplan kan det t. ex. vara frågan att nå hög hastighet på bekostnad av räckvidden eller att nå hög stighastighet, och då måste andra effektivitetsmått betraktas. I själva verket är den slutgiltiga aerodynamiska formgivningen av ett flygplan alltid resultatet av invecklade kompromisser mellan taktiska, hållfasthetstekniska och ekonomiska krav, för att nu nämna några.

Kravet att ett flygplan skall kunna starta och landa på befintliga flygplatser spelar en stor roll för formgivningen. Det händer t. ex. ofta att man måste göra vingen större än som annars är önskvärt, för att uppfylla detta krav. Allt eftersom flyghastigheterna har ökat har start- och landningshastigheterna tenderat att göra sammaledes, vilket har nödvändiggjort större flygplatser. Det anses nu allmänt, att man i sistnämnda avseende nått gränsen för vad som är ekonomiskt försvarbart, och det kalkyleras på sina håll med att framtidens överljudflygplan för passagerare kommer att starta och landa vertikalt med hjälp av nedåtriktade strålmotorer.

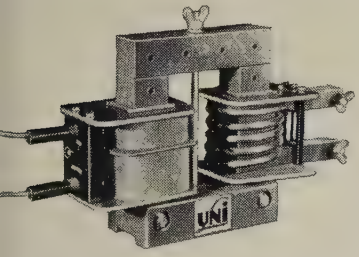
Bombflygplan kommer under de närmaste åren att börja ersättas av långdistansrobotar. Med litet fantasi kan man se en framtidsvision, där passagerare i projektilliknande farkoster framföres med astronomisk hastighet i utkanterna av eller helt utanför jordatmosfären. Dessa farkosters form blir emellertid inte lika entydigt som de nuvarandes betingad av strävan efter litet luftmotstånd. Den kraftiga värmeutvecklingen vid passage genom atmosfären med hög hastighet kan uthärdas endast om den reduceras till ett minimum genom lämplig formgivning.

PHILIPS-INSTRUMENTEN

gör undervisningen lättare för lärarna och intressantare för eleverna.

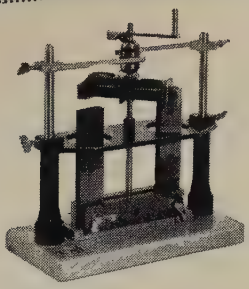


Katodstråleoscilloskopet GM 5650

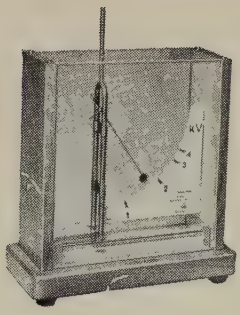


Experimenttransformatorn P5/3

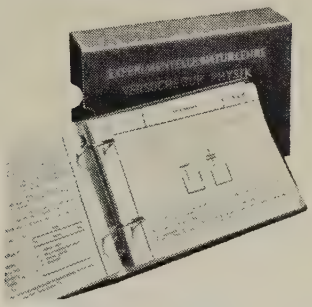
Ovanstående är bara några exempel på en sortering av instrument och litteratur som Philips tillhandahåller speciellt för fysikundervisning. Vi sänder Er gärna specialprospekt på dessa samt vår stora huvudkatalog över mättekniska utrustningar.



Motorgeneratormodellen P5/4



Statisk Voltmeter P5/6



Experimentelle Naturlehre — Versuche zur Physik

PHILIPS

PHILIPS

Svenska Aktiebolaget Philips
Mätinstrumentavdelningen
Postbox 6077 • Stockholm 6.
Tel. 34 05 80. Rikssamtal 34 06 80

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1958:

J. H. Zumberg, *Elements of Geology.* Pp. 382, $ 5.50.
C. C. Carr, *Electric Machinery.* Pp. 537, $ 9.25.
D. R. Cox, *Planning of Experiments.* Pp. 308, $ 7.50.
B. W. Gonser/E. M. Sherwood, *Technology of Niobium.* Pp. 120, $ 7.00.
A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis.* Pp. 423, $ 12.50.
E. Leimanis/N. Minorsky, *Dynamics and Nonlinear Mechanics.* Pp. 206, $ 7.75.
I. Kaplinsky/M. Hall/E. Hewitt/R. Fortel, *Some Aspects of Analysis and Probability.* Pp. 243, $ 9.00.
J. N. Goodier/P. G. Hodge Jr., *Elasticity and Plasticity.* Pp. 152, $ 6.25.
Lipman Bers, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics.* Pp. 164, $ 7.75.
J. S. Bendat, *Principles and Applications of Random Noise Theory.* Pp. 431, $ 11.00.
M. J. Zucrow, *Aircraft and Missile Propulsion.* Vol. II. Pp. 636, $ 13.00.
J. Bower/P. M. Schultheiss, *Introduction to the Design of Servomechanics.* Pp. 519, $ 13.00.
E. M. Grabbe/S. Ramo/D. E. Wooldridge, (Editors), *Handbook of Automation, Computation and Control.* Pp. ca 1000, $ 17.00.
L. K. Kirchmayer, *Economic Operation of Power Systems.* Pp. 260, $ 12.00.
D. P. Campbell, *Process Dynamics.* Dynamic Behavior of the Production. Pp. 316, $ 10.50.

A. M. Bishop, *Project Sherwood,* The U. S. Program in Controlled Fusion. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1958, Pp. 216, $ 5.75.
Francis Owen Rice, *Free Radicals* (Collected Papers). The Catholic Univ. of America Press, Washington, 1958, Pp. 278, $ 5.00.
N. R. Hanson, *Patterns of Discovery.* An Inquiry into the Conceptual Foundation of Science. Cambridge Univ. Press, 1958, Pp. 241, 30 s. net.
A. A. Shepherd, *An Introduction to the Theory and Practice of Semiconductors.* Constable & Co., London 1958, Pp. 206, 18 s. 6 d. net.
L. Lewin, *Dilogarithms and Associated Functions.* Macdonald, London, 1958, Pp. 253, 65 s. net.
Science in Schools, Edited by W. H. Perkins. Butterworths Scientific Publications, London, 1958, Pp. 150, 15 s.
P. Lorenzen, *Formale Logik.* Sammlung Göschen Bd. 1176/1176 a. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 164 S., DM 4.80.
L. Baumgartner, *Gruppentheorie.* Sammlung Göschen Bd. 837. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 110 S., DM 2.40.
K. Strubecker, *Differentialgeometrie.* III. Theorie der Flächenkrümmung. Sammlung Göschen Bd. 1180/1180 a. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 254 S., DM 4.80.
F. Hjerting, *Lille Naturlære II.* Gyldendal, København, 1958, 95 s., dkr. 7,75.
Th. Sundorph/H. Jepsen, *Kemi for seminarier.* 5. udg. ved F. Hjerting. Gyldendal, København 1958, 106 s., dkr. 13,85.
Fr. Ehrnst, *Matematik för reallinjens första ringar.* Almqvist & Wiksell. Stockholm, 1958, 223 s., inb. kr. 11: 75.
G. Blom, *Statistical Eestimates and Transformed Beta-Variables.* Almqvist & Wiksell, Stockholm/J. Wiley & Sons, New York, 1958, Ph. 176, kr. 20: —.
Lindström/Jonzon/Jansson, *Nya räkneboken.* Sjunde klassen. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958, 112 s., kr. 2: 75.
O. Sjöstrand, *Differential- och integralkalkyl* samt *Plan analytisk geometri.* För tekniska läroverk. 2:a uppl. Gumperts Göteborg, 1958, 270 s., kr. 18: —.

Forts. sid. 316

Moderna magnetiska material II

Av civilingenjör Stig Anvill och bergsingenjör Per M. Carlberg, Surahammar

B. Mjukmagnetiska material[1]

Material för elektromaskinindustrien

För användning i maskiner och transformatorer, där materialet i regel utsättes för växelströmsmagnetisering, önskar man material med låga förluster och hög permeabilitet vid större flödestätheter. Förlusterna bestå av hysteresförluster och av virvelströmsförluster, och för att hålla de senare nere använder man materialet i form av plåt (elektroplåt) av kisellegerat järn. Ibland tillsättes även något aluminium. Kisel höjer nämligen den elektriska resistiviteten avsevärt. En annan fördel med kiseltillsatsen är att austenitområdet blir sammanträngt för att vid kiselhalter över 2,5 % helt försvinna. Detta betyder, att man kan genomföra den slutliga värmebehandlingen vid hög temperatur utan att materialet genomgår någon fasomvandling. Därigenom kan ett grovkornigt material erhållas, vilket ger låg koercitivkraft och låga förluster.

Av det tidigare sagda framgår, att frihet från omagnetiska inneslutningar är av största betydelse för låga förluster. Dessa inneslutningar kunna vara t. ex. oxider, karbider och nitrider. De senare kunna minskas i antal genom att kol och kväve delvis kunna elimineras under glödgningen av materialet, men oxiderna (kisel- och aluminiumoxider) äro stabilare, varför den halt man erhållit vid tillverkningen av materialet i stålugnen bibehålles eller t. o. m. ökas under den fortsatta behandlingen.

I en modern tillverkning av elektroplåt göras som regel stålgöten mycket stora, med en vikt av 2 till 6 ton. Dessa varmvalsas i götverk till bandämnen, s. k. slabs, som valsas vidare, eventuellt efter ytbehandling och omvärmning, till varmvalsade band av ca 3 mm tjocklek och 800 à 1000 mm bredd. Den fortsatta valsningen kan antingen ske som en varmvalsning, vilket hittills varit vanligast, eller som en kallvalsning.

I det förra fallet uppklippes bandet till ämnen, vilka sedan läggas samman och valsas i paket, som efter dubbling till slut bestå av sex eller flera plåtar. Dessa paket klippas, varefter de enskilda plåtarna fläkas i sär. De betas eventuellt och gå efter en riktvalsning till glödgning. Denna utföres med plåtarna i travar på 5 à 10 ton i stora klock-

[1] Forts. från föregående häfte, s. 169—178.

ugnar, som lämpligen äro utrustade för glödgning i skyddsgas av kväve eller väte. Glödgningstemperaturen varierar, beroende på kvalitet och kiselhalt, och kan bereda många praktiska svårigheter, bl. a. genom att plåtarna i travarna tendera att sintra ihop.

Om slutvalsningen utföres som kallvalsning, betas eller sandblästras det varmvalsade bandet, varefter det kallvalsas i stora kallvalsverk till den önskade sluttjockleken. Ofta måste man lägga in mellanglödgningar för att ej få för stor kallbearbetning och för finkornigt material. Slutglödgningen kan utföras på samma sätt som för det varmvalsade materialet, varvid det kallvalsade bandet först uppklippes till ark. Ofta föredrar man emellertid att leverera materialet i bandform (lägre skrotprocent vid stansningen), och då kunna kontinuerliga glödgningsugnar med fördel användas.

Elektroplåten klassificeras efter sina magnetiska egenskaper, vilka bestämmas med en epsteinapparat eller motsvarande. Man bygger då upp en liten provtransformator av klippta strimlor och mäter förlusterna (W/kg) vid 10 och 15 kilogauss maximal flödestäthet med 50 Hz växelström (P_{10} resp. P_{15}) och ibland även flödestätheten vid vissa givna H-värden med växelström eller likström, t. ex. 25 och 100 At/cm (B_{25} resp. B_{100}). Sedan gammalt användes P_{10} i första hand för klassning av elektroplåt, medan P_{15} har större praktisk betydelse. Efter användningsområdet kunna de vanliga elektroplåtkvaliteterna indelas i följande grupper:

1. Plåt för små motorer o. d. utföres i 0,50 eller 0,65 mm tjocklek med en kiselhalt av 0,5 till 2,0 %. De magnetiska egenskaperna spela ofta en mera underordnad roll, men lågt pris och god bearbetbarhet äro viktiga. $P_{10}=3{,}0$ W/kg, $P_{15}=6{,}8$ W/kg, $B_{25}=15\,500$ gauss.
2. Plåt för medelstora och större maskiner utföres i 0,50 eller 0,35 mm tjocklek, med kiselhalter av 2,5 till 3,5 %. De magnetiska kraven äro avsevärt pressade. $P_{10}=1{,}20-1{,}75$ W/kg, $P_{15}=2{,}80-4{,}0$ W/kg, $B_{25}=14\,700-15\,300$ gauss.
3. För stödplåtar, polplåtar o. d. användes i större maskiner plåt av 1,0—2,0 mm tjocklek med kiselhalter av 0,5—3,0 %.
4. För transformatorer användes 0,50 eller kanske vanligast 0,35 mm plåt med 3,5—4,5 % Si, och med $P_{10}=0{,}90-1{,}45$ W/kg, $P_{15}=2{,}30-3{,}30$ W/kg, $B_{25}=14\,400-14\,800$ gauss.

I elektriska maskiner användes mycket material i form av smiden, plåt och gjutgods för rotorer m. m., varvid man jämte kvalificerade mekaniska egenskaper önskar hög flödestäthet vid likströmsfält av storleksordningen 100 At/cm. Man använder i dylika fall kolstål eller låglegerade stål. Totalt tillverkas för närvarande drygt en miljon ton elektroplåt per år, varav ungefär hälften i USA och ca 30 000 ton i Sverige.

Orienterad elektroplåt

Under de senaste tio åren har en ny typ av högvärdig kisellegerad elektroplåt fått stor användning inom elektromaskinindustrien, nämligen den s. k. orienterade elektroplåten. Som tidigare framhållits har kisellegerat material sin magnetiska företrädesriktning i kubkanten. Vid laboratorieförsök, som under 1930-talet gjordes oberoende av varandra av Goss samt Frey och Yensen i USA, fann man, att man genom

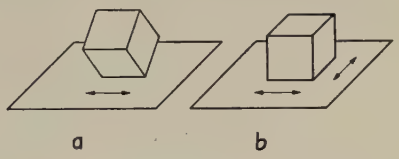


Fig. 7. a) Textur i vanlig orienterad kisellegerad plåt. b) Kubisk textur. Pilarna ange företrädesriktningar.

en lämplig kombination av valsning och mellanglödgning vid kallvalsning av band med ca 3 % Si erhöll en slutstruktur efter värmebehandlingen enligt fig. 7 a med en företrädesriktning i valsningsriktningen. Det orienterade materialet måste därför användas så, att det magnetiseras i en riktning, som så nära som möjligt överensstämmer med valsningsriktningen. Detta går ganska lätt att utföra i transformatorer, även om hörnen skapa vissa bekymmer, men vid roterande maskiner stöter man naturligtvis på stora svårigheter. Den orienterade elektroplåten ersätter främst de höglegerade kvaliteterna (grupp 4 ovan). Representativa värden äro $P_{10}=0{,}52$ och $P_{15}=1{,}12$ W/kg samt $B_{25}=19\,000$ gauss.

Helt nyligen har man lyckats att framställa en kisellegerad plåt med kubisk textur, dvs. med två mot varandra vinkelräta företrädesriktningar i plåten enligt fig. 7 b. Materialet har ännu blott framställts laboratoriemässigt i vanliga tjocklekar. Vid god texturskärpa äro de magnetiska egenskaperna i båda riktningarna jämförbara med ovanstående värden för enkelorienterad plåt. En produktion kan dock väntas dröja åtskilliga år.

Nickel- och koboltlegerad elektroplåt

Järn-nickel-legeringar med 35—80 % Ni ha jämfört med järn-kisel-legeringar mycket låga värden på anisotropikonstanten K_1, vilket medför hög permeabilitet och låg koercitivkraft. Trots sin förhållandevis låga mättning ha dylika legeringar därför fått mycket stor användning inom teleindustrien. Priset är högt, ca 20 gånger högre än för kisellegerade material. I tabell 1 har upptagits några representativa materialtyper.

Genom kraftig kallreduktion av en 50 % Ni-legering och efter-

Tabell 1. Några mjukmagnetiska material

Nr	Kommersiellt namn t. ex.	Sammansättning	μ_i	μ_{max}	H_c örsted	J_s gauss	B_r gauss	ϱ ohm·mm²/m	Speciella användningsområden
1	Rhometal, 400-N	36Ni+64 Fe	1 500	6 000	0,5	13 000		0,80	
2	500-N, Permalloy B	50Ni+50 Fe	3 500	35 000	0,15	16 000	7 500	0,50	
3	500-Nv, 5000 Z	» [1]	1 000	60 000	0,2	16 000	14 500	0,50	Transduktorer
4	Mumetal, 731-N	T. ex. 77Ni+5Cu+2Cr+16 Fe	20 000	80 000	0,03	7 000	4 000	0,60	
5	Molypermalloy	78Ni+4Mo+18Fe	20 000	75 000	0,05	8 500	4 500	0,55	
6	Permalloy C	77Ni+4Mo+5Cu+14Fe	20 000	75 000	0,03	8 000	4 000	0,60	
7	M 1040	72Ni+14Cu+3Mo+11Fe	60 000	90 000	0,01	6 000	2 000	0,56	
8	Supermalloy	79Ni+5Mo+0,5Mn+15Fe	100 000	800 000	0,004	8 000		0,60	
9	Vanadinpermendur	49Co+2V+49Fe	800	4 500	2,0	24 000	14 000	0,26	Telefonmembran
10	(Varmvalsat Si-legerat)	3Si+97Fe	800	8 000	0,5	20 000	7 000	0,47	
11	(Orienterat Si-legerat)	» [2]	1 500	40 000	0,1	20 000	14 000	0,47	

μ_i = begynnelsepermeabilitet H_c = koercitivkraft B_r = remanens

μ_{max} = maximipermeabilitet J_s = vid mättning inducerad flödestäthet ϱ = resistivitet

[1]) Kubisk kristallorientering enligt fig. 7 b.

[2]) Kristallorientering enligt fig. 7 a.

följande värmebehandling kan även här en kubisk textur enligt fig. 7 b erhållas (nr 3). Man får därvid en rektangulär hysteresslinga med hög remanens. Vid omkring 78 % Ni äro både kristallanisotropi och magnetostriktion praktiskt taget obefintliga, vilket medför utomordentliga magnetiska egenskaper vid lägre B-värden. Den rena legeringen har låg resistivitet, varför man tillsätter några procent av t. ex. krom, koppar eller molybden. Dessa nickellegerade material användas som regel vid högre frekvenser (1000 Hz), vilket på grund av den höga permeabiliteten kräver mycket tunn plåt, 0,05—0,35 mm. För magnetiska minnen användes 0,003 mm tjock molypermalloy, vilket torde vara den tunnaste, kommersiellt tillgängliga plåten. Genom svalning i magnetfält kunna domänerna genom magnetostriktionen bli spontant magnetiserade i en önskad riktning. Detta ger en mycket brant magnetiseringskurva och har i praktiken använts för material nr 3 med fyrkantig hystereskurva.

Järn-kobolt-legeringar karakteriseras av hög mättning, medan de övriga magnetiska egenskaperna äro medelmåttiga. De äro svåra att bearbeta, vilket jämte det höga koboltpriset gör dem mycket kostbara.

C. Permanenta magneter

I en permanentmagnetisk krets är arbetslinjen L (fig. 8) bestämd av kretsens geometri, bl. a. av förhållandet mellan järnlängd och luftgap. L skär hystereskurvan i arbetspunkten A i andra kvadranten. För optimal dimensionering bör A sammanfalla med den punkt på avmagnetiseringskurvan, där energiprodukten $B \cdot H$ har maximum. Värdena på $(BH)_{max}$, koercitivkraften H_c samt remanensen B_r karakterisera därför en permanent magnet.

Tidigare användes valsade krom-, volfram- och koboltstål, som härdades. Koercitivkrafter omkring 100 örsted erhölls och berodde på de av martensitbildningen framkallade inhomogena spänningarna (jämför ekv. 6 a). År 1931 upptäckte japanen Mishima en ny typ av hårdmagnetiskt material med järn, nickel och aluminium, som visade mycket goda egenskaper. Materialet är emellertid mycket sprött och kan ej varmbearbetas eller formas med skärande verktyg. Magneterna gjutas därför till önskad form, och kritiska ytor slipas. De kunna även göras pulvermetallurgiskt.

Senare ha ytterligare förbättringar gjorts,

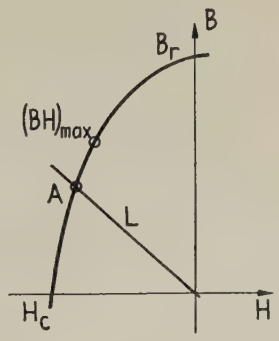
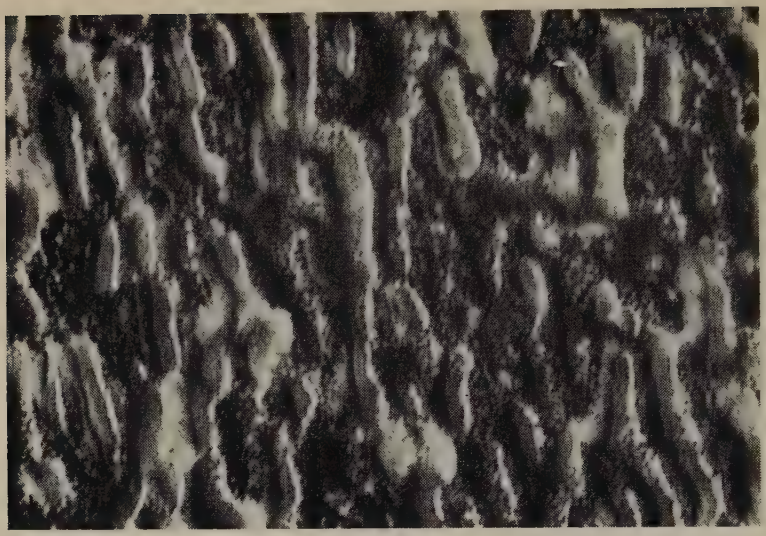


Fig. 8. Avmagnetiseringskurva för en permanentmagnetisk krets.



500 Å Philips Technical Review

Fig. 9. Utskiljningar i Ticonal G (alnicotyp), som svalnat i ett kraftigt, längs en vertikal kubkant riktat magnetfält (Haanstra, de Jong och Smeets).

varvid legeringsämnena utökats med kobolt och i många fall även med koppar och titan. Magneter av denna typ benämnas vanligen Alnicomagneter. En vanlig alnicokvalitet ger med 10 % Al, 17 % Ni, 17 % Co och 5 % Cu en koercitivkraft av 700 örsted, en remanens av 7500 gauss och ett $(BH)_{max}$-värde av $1{,}8 \cdot 10^6$ gauss · örsted. Vid en titantillsats ökar koercitivkraften till över 1000 örsted medan remanensen minskar något. En dylik magnet får en flack avmagnetiseringskurva och användes då arbetslinjen också ligger flackt, dvs. då luftgapet är förhållandevis stort.

Orsaken till de höga koercitivkrafterna i alnicomagneterna är enligt elektronoptiska undersökningar, att en findispers fas utskiljes under svalningen från gjutningen eller från en extra värmebehandling. Denna fas ombildas till form och sammansättning ytterligare vid en längre tids anlöpning vid omkring 550°C. Grundmassan uppdelas härigenom i ett stort antal kristalliter, som äro så små (utskiljningarna äro ungefär 700 Å långa, 300 Å breda, och avståndet mellan dem 100 Å), att de bilda en enda domän. Genom en svalning i ett mycket kraftigt magnetfält vid värmebehandlingen inriktas utskiljningarna i magnetfältets riktning, som framgår av fig. 9. Ett forskarlag vid Philips har med en avancerad elektronoptisk teknik tagit denna bild vid 160 000 gångers förstoring. På grund av formanisotropien erhålles en avsevärd höjning

av magnetiseringskurvan, medan koercitivkraften fortfarande blir ca 700 örsted. Remanensen uppgår till omkring 12 000 gauss och $(BH)_{max}$ till $5{,}0 \cdot 10^6$ gauss · örsted. Avmagnetiseringskurvan blir nästan rektangulär. Dessa magneter ha största värdet då arbetslinjen går brant, dvs. då luftgapet är litet, vilket inträffar t. ex. i en högtalarmagnet. Ytterligare en förbättring kan erhållas, om man genom en riktad kristalltillväxt vid stelningen efter gjutningen får kristallernas kubkanter i magnetiseringsriktningen. En tillverkning av sådana magneter i fullstor skala har nyligen börjat. Man uppnår $(BH)_{max}$-värden på $8{,}0 \cdot 10^6$ gauss · örsted, med en höjning av koercitivkraften gentemot magnetfältkylda magneter utan kristallorientering.

Försök ha även gjorts att göra permanenta magneter genom att pressa ytterst fint järnpulver med ett bindemedel. Järnpulvret bör ha avlånga korn, så att formanisotropien blir hög. Ännu har en tillverkning i större skala ej lyckats. Det fina järnpulvret är dyrt och svårt att hantera (bl. a. starkt pyrofort).

D. Oxidkeramiska material (ferriter, spineller)

Vid de inom teletekniken förekommande höga frekvenserna blir användningen av högpermeabel plåt ofta olämplig på grund av virvelströmsförlusterna och skineffekten. Sedan antiken har magnetit, Fe_3O_4, varit bekant för sina magnetiska egenskaper. Magnetit har ganska god elektrisk ledningsförmåga, men besläktade material äro praktiskt taget isolatorer. Redan vid sekelskiftet insåg man det praktiska värdet härav, men tanken var då för tidigt väckt, och först efter andra världskriget ha ferriterna, som de vanligen benämnas, blivit ett tekniskt magnetiskt material av största intresse.

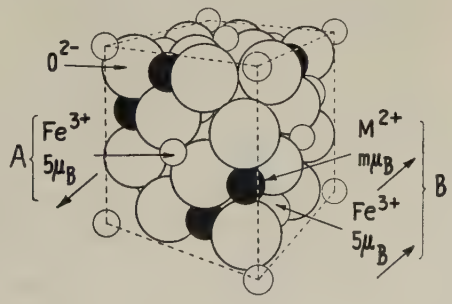


Fig. 10. Gitterstruktur för en kubisk ferrit. A) tetraederläge, B) oktaederläge. Ur »Science News».

Uppbyggnad. Magnetisk teori

Den schematiska uppbyggnaden av en kubisk ferrit framgår av fig. 10. Dess formel kan skrivas $M^{2+}Fe_2^{3+}O_4^{2-}$, där M^{2+} är en tvåvärd

metalljon. Två olika typer av platser för metalljonerna finnas. De kunna vara omgivna av fyra syrejoner i tetraederläge (A) eller av sex syrejoner i oktaederläge (B). I en normal spinell ligga M^{2+} i tetraederläge, medan i en invers spinell dessa uppta halva antalet platser i oktaederlägena. Skrives jonen i A-läge först, kunna de inversa spinellerna magnetit och nickelferrit betecknas respektive $Fe^{3+}(Fe^{2+}Fe^{3+})O_4^{2-}$ och $Fe^{3+}(Ni^{2+}Fe^{3+})O_4^{2-}$, medan den normala zinkferriten blir $Zn^{2+}(Fe^{3+}Fe^{3+})O_4^{2-}$. I enhetscellen ingå 32 syrejoner, 8 A-positioner och 16 B-positioner.

De ingående metalljonernas magnetiska moment μ_B (Bohr-magnetoner) ha följande värden:

jon	Mn^{2+}	Fe^{2+}	Fe^{3+}	Co^{2+}	Ni^{2+}	Zn^{2+}
μ_B	5	4	5	3	2	0

Vore jonernas spin likriktade, skulle mättningen vara summan av dem, för nickelferrit 12 magnetoner. I verkligheten är den blott drygt 2 magnetoner. För att förklara detta har Néel antagit tre olika kopplingar mellan joner i spinellgittret:

A—A: inbördes påverkan av metalljonerna i A-läge
B—B: inbördes påverkan av metalljonerna i B-läge
A—B: inbördes påverkan mellan A- och B-grupperna

Kopplingarna äro genomgående negativa, dvs. spinnen ställa sig antiparallellt. I den inversa nickelferriten ligga i:

A-position: hälften av Fe^{3+}-jonerna (5 magnetoner)
B-position: hälften av Fe^{3+} samt Ni^{2+}-jonerna (5+2 magnetoner)

A—B-kopplingen dominerar helt över A—A- respektive B—B-kopplingarna, och då spinnen stå antiparallellt blir det resulterande momentet 5+2—5=2 magnetoner (se fig. 10).

Om en Zn^{2+}-jon, som är diamagnetisk, tillföres nickelferriten i utbyte mot nickel, ersätter Zn-jonen först en Fe^{3+}-jon i A-läge. Man får en minskning av antalet magnetoner i A-läge och en ökning av antalet magnetoner i B-läge, och eftersom A- och B-spinnen stå antiparallella ökar det resulterande magnetiska momentet. Om denna process kunde fortgå ostörd, skulle man, då alla Ni-joner utbytts mot Zn-joner, ha ett resulterande moment av 10 magnetoner, helt från B-lägets Fe^{3+}-joner. A-läget ger ej några magnetiska moment, eftersom där endast finnas de diamagnetiska zinkjonerna. Det finns följaktligen ingen A—B-koppling, och den negativa B—B-kopplingen, som tidigare varit undertryckt, ordnar spinnen i B-läget antiparallellt. Det resulterande magnetiska momentet blir noll. Det största momentet erhålles därför vid sammansättningen $(Zn^{2+}_{0,5}Fe^{3+}_{0,5})(Ni^{2+}_{0,5}Fe^{3+}_{1,5})O_4^{2-}$ och är teoretiskt 6

magnetoner, i verkligheten på grund av B—B-kopplingen ca 5 magnetoner.

Néel har för ferriternas magnetiska egenskaper infört beteckningen ferrimagnetism. Man får tänka sig ferritkristallerna uppdelade i domäner på samma sätt som de ferromagnetiska metallerna. Magnetiseringsförloppen bestå på samma sätt av förskjutningar av domänväggar och vridningar av magnetiseringen inom domänerna.

Bortsett från magnetit är ferriternas resistivitet mycket hög, omkring 10^4 ohm · mm²/m. Ännu vid 100 MHz är därför inträngningsdjupet ca 5 mm, varför någon skineffekt icke behöver befaras. Trots detta sjunker permeabiliteten raskt vid dessa frekvenser, vilket ännu ej har kunnat förklaras tillfredsställande.

Mjukmagnetiska ferriter

För mjukmagnetiska ändamål använder man kubiska ferriter med zink samt koppar, nickel, mangan eller magnesium. De gå under handelsnamn som Ferroxcube, Ceramag, Hyperox. Genom tillsats av zink har man ökat mättningsvärdet. Dessutom sänker man därigenom Curiepunkten, och eftersom begynnelsepermeabiliteten blir större, ju närmare denna man kommer, vinner man även en högre begynnelsepermeabilitet genom zinktillsatsen. Curiepunkten ligger mellan 100°C och 200°C för de kommersiella mjukmagnetiska ferriterna, varför deras magnetiska egenskaper bli ganska temperaturberoende.

Tabell 2. Mjukmagnetiska ferriter

Namn	Sammansättning (Fe_2O_3+)	Mättning J_s gauss	H_c örsted	μ_i	Curiepunkt °C	ϱ ohm. mm²/m
Magnetit	FeO	6000	3	70	585	10^{-2}
Nickelferrit	NiO	3000	10	10	580	—
Kopparferrit	CuO	3400	1,5	70	420	—
Ferroxcube I	0,4 CuO + 0,6 ZnO	—	—	1500	—	—
» II	0,5 MgO + 0,5 ZnO	3500	—	600	—	$4 \cdot 10^5$
» III	0,5 MnO + 0,5 ZnO	2500	0,1	1000	150	$5 \cdot 10^5$
» IV	0,3 NiO + 0,7 ZnO	4200	0,04	3800	—	10^7

Tabell 2 visar tydligt de kommersiella bland-ferriternas överlägsenhet ur magnetisk synpunkt. Utvecklingen går fortfarande raskt framåt, och bland nyare material kunna nämnas ferriter med fyrkantig hysteresslinga för magnetiska minnen (magnesiummanganferriter), varvid rektangulärriteten erhålles genom ringa utstyrning och ej genom kristallanisotropi, samt ferriter för höga frekvenser (Ferroxplanaferriter, hexagonala bariumferriter med kobolt eller magnesium).

Mjukmagnetiska ferriter användas i kärnor för drosslar och transformatorer och framför allt för styrringar till televisionsrör.

Oxidmagneter

För att erhålla hög koercitivkraft är det önskvärt med en ferrit med stor kristallanisotropi. De hexagonala bariumferriterna uppvisa extremt höga värden på K_1, av storleksordningen $90 \cdot 10^5$ erg/cm^3, dvs. ungefär tjugo gånger större värde än för järn. För bariumferriten är mättningen ungefär 4200 gauss, varför man enligt ekv. (8) skulle kunna påräkna koercitivkrafter av storleksordningen 10 000 örsted. Dylika höga värden erhållas endast, om varje korn i ferritkärnan är så litet, att det utgör en enda domän. Den kritiska partikeldiametern är ca 0,0013 mm.

Hårdmagnetiska ferriter tillverkas under beteckningarna Ferroxdure, Koerox, Vectolite m. fl. De bestå huvudsakligen av bariumferrit $BaO \cdot 6Fe_2O_3$. Remanensen är ungefär 2000 gauss, koercitivkraften 3000 örsted och $(BH)_{max}$ $0{,}8 \cdot 10^6$ gauss · örsted. Avmagnetiseringskurvan är mycket flack. Den låga flödestätheten kräver hög tvärsnittsarea på magneten, men den höga koercitivkraften tillåter korta magnetlängder och stora luftgap.

Det är möjligt att genom pressning av magnetkärnan i magnetfält få en anisotropi med högre remanens men lägre koercitivkraft. Magnetens energiinnehåll blir avsevärt högre, ca $3 \cdot 10^6$ gauss · örsted. Förfarandet stöter på stora praktiska svårigheter.

Oxidmagneterna ha hittills haft användning endast för speciella ändamål, framför allt för fokuseringsringar till televisionsrör. En fördel är den höga resistiviteten, som möjliggör användning i växelströmsmagnetiserade kretsar. En nackdel, gemensam för alla ferriter, är sprödheten.

Litteraturförteckning

Här ha endast medtagits arbeten av översiktskaraktär, vilka i sin tur innehålla talrika hänvisningar till originalavhandlingarna.

R. Becker/W. Döring: »Ferromagnetismus», Julius Springer, Berlin 1939. (Delvis föråldrad.)

R. M. Bozorth: »Ferromagnetism», Van Nostrand, New York 1951.

A. Fairweather/F. F. Roberts/A. J. E. Welch: »Ferrites», Rep. Progress in Physics *15* (1952), s. 541.

K. Hoselitz: »Ferromagnetic Properties of Metals and Alloys», Oxford University Press, Oxford 1952.

C. Kittel/J. K. Galt: »Ferromagnetic Domain Theory», Solid State Physics *3* (1956), s. 437.

F. Pawlek: »Magnetische Werkstoffe», Springer Verlag, Berlin 1952.

F. Pawlek: »Fortschritte auf dem Gebiete der magnetischen Werkstoffe und ihrer Anwendung», AEG-Mitteilungen *46* (1956), s. 337. (Forts. av ovanstående arbete.)

Formler, symboler och modeller i elementär kemiundervisning

Av lektor Bertil Englund, Uppsala

Denna artikel utgör en bearbetning av föreläsningar vid de förberedande lärarkurserna i Stockholm. Vid diskussionerna, som anordnats i anslutning till föreläsningarna, har många intressanta synpunkter lagts fram av deltagarna och tagits upp här. Syftet med föreläsningar och diskussioner har främst varit att försöka klarlägga de svårigheter, som elever kan ställas inför vid sitt arbete med formler. Detta är anledningen till att kommentarerna till exemplen i denna artikel, vilka är hämtade ur mina och andra svenska läroböcker, ibland är så frispråkiga och kritiska.

I förordet till 11:e upplagan 1947 av sin lärobok i kemi för realskolan skriver Gunnar Starck: »I denna upplaga, som är radikalt omarbetad, har kemiska tecken, kemiska formler och atombegreppet införts på ett mycket tidigt stadium. Intet försök har gjorts att som förut lägga en empirisk grundval för atombegreppet genom att gå vägen över ekvivalentvikterna.» I 10:e upplagan (1941) kom de kemiska tecknen osv. på 30:e textsidan, i den 11:e redan på 16:e textsidan efter en experimentell uppläggning av några grundbegrepp. Många av de nyare svenska läroböckerna för in formler ännu raskare, och säkert finns det många lärare som skriver formler redan andra eller tredje lektionen med nybörjare. De metodiska anvisningarna för realskolan (1955) säger i sin officiella försiktighet: »Formler införes för de allmännaste reaktionerna ...», men antyder ingenting om tidpunkten, när detta bör ske. Det betonas sedan, att formelskrivning inte får utgöra ett väsentligt moment utan »allenast ett medel att uppnå ett förkortat beteckningssätt». I Supplement till enhetsskolans timplaner 1956 läser vi: »Om så befinnes lämpligt, kan grundämnenas tecken presenteras, i första hand som ett förkortat skrivsätt». Om sålunda en lärare börjar den första lektionen i 4^5 med att visa svavels egenskaper, kan han naturligtvis genast använda beteckningen S för detta grundämne (för en atom av detta grundämne). Redan under de första kemiveckorna kan man skriva

kemiska *tecken* för *grundämnen*,
kemiska *formler* för *föreningar*,
reaktionsformler för kemiska förlopp.

Det gäller givetvis, att man här i början inte tar med andra reaktioner än sådana, där reaktionsformeln kan skrivas mycket enkelt. Bildning och sönderdelning av vissa metalloxider visar vad jag menar med en god användning av formler »som ett förkortat skrivsätt»:

$$Mg + O \rightarrow MgO$$
$$HgO \rightarrow Hg + O$$

De kemiska tecknen betyder här grundämnena, de kemiska formlerna föreningarna. Men naturligtvis betyder tecknet en atom av detta grundämne och *en viss viktsmängd* därav. Reaktionsformlerna är riktiga med hänsyn till viktsmängderna. Kvicksilveroxidens sönderdelning kan utföras som ett kvantitativt experiment med beräkningar efter denna enkla reaktionsformel.

För en fortsatt utveckling av formelskrivandet behöver man experiment med sådana reaktioner, som på ett naturligt sätt kräver mer komplicerade formler än dem, som bara innehåller 1 atom av vartdera grundämnet. Elektrolytisk sönderdelning av klorväte och av vatten är då instruktivt: man får ju lika stora volymer väte och klor, resp. dubbelt så mycket väte som syre. Med hjälp av resonemang om gasers fysikaliska egenskaper och enkla molekylmodeller ställer vi (i Uppsala) upp reaktionsformlerna

$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl \text{ och } 2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

och har funnit, att dessas innebörd mycket fort blir elevernas egendom. »Två vätemolekyler reagerar med en syremolekyl och ger två vattenmolekyler». De illustreras genom att vi på tavlan ritar »volymer» (kvadrater) med samma antal fria molekyler i.

Ett lärorikt exempel är också »gengasförsöket»: man leder syre genom ett rör med glödande kolflisor, som då tänder sig och brinner med starkt sken, och kan samtidigt tända en låga, där den uppkomna koloxiden strömmar ut. Kolet måste sålunda, som en pojke sade, »ha brunnit två gånger». Den första reaktionen skrives i stil med formlerna för oxidation av metallerna (se ovan)

$$C + O \rightarrow CO$$

och sedan följer på ett sätt, som jag tror är naturligt för elever i första årskursen

$$CO + O \rightarrow CO_2$$

Då betyder O grundämnet syre — kanske närmast en viss vikt syre. (På gymnasiet måste naturligtvis dessa reaktioner skrivas med O_2 och formuleras som jämvikter.)

Om atomerna sålunda numera kommer in mycket snart i kemiundervisningen på grund av läroböckernas nyordning, gäller detta knappast jonerna — den olycksaliga fasförskjutningen mellan fysik och kemi i enhetsskolans planer gör det ju f. ö. nästan omöjligt där. För min del går jag dristigt fram också med jonbegreppet. Vid elektrolysen av saltsyra för jag in beteckningar för de partiklar, som transporterar de elektriska laddningarna. Det är nyttigt att klargöra ordentligt för eleverna betydelsen av beteckningarna:

atom:	H	Cl		
jon:	H^+	Cl^-		
molekyl:	H_2	Cl_2	HCl	H_2O

Jonreaktioner

1. Det är sant, att formelskrivningen inte är ett *mål* för kemiundervisning utan ett *medel,* men detta medel är så viktigt, att man måste ägna det stor uppmärksamhet. Formelskrivande blir inte lättare för att det tas ometodiskt eller slarvigt. Som krav på en reaktionsformel har jag brukat ställa: den skall börja med kända utgångsämnen (på vänstra sidan om pilen) och sluta med observerade eller åtminstone sannolika och rimliga reaktionsprodukter. Bland de »typiska reaktionsformler», som lärjungarna enligt de metodiska anvisningarna skall kunna skriva korrekt under givna förutsättningar, har vi *jonreaktionsformlerna.* De kommer in redan under vårterminen i realskolans första årskurs. Här är det praktiskt, att dessa delas in i tre grupper: gasutvecklingar, fällningar och neutralisationer. För dessa tre fall kan man ge »reaktionsregler», som används, när formler skrivs: vid reaktionen bildas resp. en flyktig, en svårlöslig eller en icke joniserad förening (dvs. i realskolan vatten). En systematisk genomgång av jonreaktioner är lämplig i ring I, sedan jonbegreppet vuxit till sig hos eleverna och kanske belysts också med experiment över additiva egenskaper. De tre »reaktionsreglerna» växer här ihop till *en* regel. Jag hänvisar till min lärobok för gymnasiet, där också en bild av gasutveckling finns. Det är bäst att uttryckligen varna för alltför åskådliga bilder, så åskådliga, att de inte längre motsvaras av verklighet, t. ex. molekyler av salter, där jonerna hålls ihop av hakar och hyskor »för att barnen skall begripa det bättre».

Hur man stegvis bygger upp en formel för en jonreaktion vill jag förevisa utförligt. Man skriver först upp utgångsämnena

(1) $NaCl + H_2SO_4 \rightarrow$

och markerar i dessa formler de joner, som finns

(2) $Na^+Cl^- + H^+{}_2SO_4^{--} \rightarrow$

Den observerade reaktionsprodukten är klorväte:

(3) $\rightarrow HCl$

De joner, som inte deltagit i reaktionen, paras ihop i rätt antal:

(4) $\rightarrow HCl + Na^+_2SO_4^{--}$

Reaktionsformeln är nu riktig (utgångsämnen, slutprodukter), men inte färdig (koefficienter). Nästa steg blir med hänsyn till H-atomerna, som inte »stämmer»,

(5) $\rightarrow 2HCl$

och slutligen med hänsyn till Cl-atomerna

(6) $2Na^+Cl^-$ ....

Alla momenten (1) t. o. m. (6) skrivs förstås på en rad, som alltså fått utseendet

$$2Na^+Cl^- + H^+_2SO_4^{--} \rightarrow 2HCl + Na^+_2SO_4^{--}$$

Orsaken till reaktionen — uppkomst av en flyktig förening — framhålls alltså i en på detta sätt skriven reaktionsformel genom att *en* formel skrivits utan jonbeteckningar.

Åtskilliga gånger, då jag talat om denna metod med kolleger, har den mycket berättigade frågan ställts, om man inte från början borde skriva

(1 a) $Na^+ + Cl^- + 2H^+ + SO_4^{--} \rightarrow$

På lektioner i R I har jag i flera år brukat visa upp de två olika metoderna och sedan frågat eleverna, vilket sätt de ansåg vara bäst. Det har då alltid funnits några röster för metoden med fria joner skrivna från början (1 a), men en förvånande stor del av klassen vill skriva på det första sättet. Dessa elevers skäl är mycket påtagligt och förståeligt: de vill i *formeln* se de *föreningar,* som man tagit som utgångsmaterial. Det är möjligen ett primitivt sätt att se saken, men min erfarenhet säger, att felen vid formelskrivningen tycks bli färre och oskyldigare, då de gör så. Det är ett av skälen, att jag rekommenderar den vägen. Att det som verkligen skett, kan uttryckas så enkelt som

$$H^+ + Cl^- \rightarrow HCl$$

är möjligen närmast förbryllande för normalelever i R I. Sedermera — vid behandling av löslighetsprodukter — uppskattas ett sådant komprimerat skrivsätt.

2. Formler för *fällningsreaktioner* bereder i allmänhet inga svårigheter; nybörjaren har hjälp av att kunna markera fällningen på något sätt — med understrykning eller med en pil, som pekar nedåt. Någon

så att säga internationell beteckning för fällning finns inte. I termokemiska formler skriver man t. ex. AgCl(s), där s betyder solidus=fast, och SCHWARZENBACH försökte föra fram beteckningen {AgCl}. Ett utmärkt sätt (prövat i klasser i Uppsala) är att skriva $\underline{Ag^+Cl^-}$ — understrykningen betyder, att det är ett fast ämne och jonbeteckningarna att det är ett salt med jongitter. Ett exempel med »tolkning»: En vattenlösning av silvernitrat+en vattenlösning av natriumklorid ger en fällning av silverklorid+en vattenlösning av natriumnitrat:

$$Ag^+NO_3^- + Na^+Cl^- \rightarrow \underline{Ag^+Cl^-} + Na^+NO_3^-$$

1 silverjon och 1 nitratjon i lösning+ 1 natriumjon och 1 klorjon i lösning ger 1 silverjon och 1 klorjon i fast silverklorid+1 natriumjon och nitratjon i lösning.

3. Ett speciellt exempel med *flyktighetsregeln* som underlag är värt att betrakta närmare. Man vill i klass 4[5] skriva förloppet vid reaktionen mellan koksalt och utspädd salpetersyra vid uppvärmning, och man har definierat syror som ämnen, som ger hydroniumjoner. Alltså börjar man

$$Na^+Cl^- + H_3O^+NO_3^- \rightarrow$$

Vilken flyktig förening kan bildas här? Ingen. — *Anm.:* H_3OCl är ett kristalliserat salt, som nog finns i frusen koncentrerad saltsyra.

Ett annat exempel, där hydroniumjonen ger anledning till funderingar: kalciums reaktion med vatten kan man få se formulerad

$$Ca + 2H_3O^+ + 2OH^- \rightarrow Ca^{++} + 2OH^- + H_2 + 2H_2O.$$

Det har förvånat många, att vatten bildas vid denna reaktion! I all elementär undervisning bör man använda ett enkelt H^+ som symbol för de positiva jonerna i syra-lösningar och i vatten.

Syra-bas-reaktioner

Ett par syra-bas-reaktioner på R II[4]:s plan är givande att diskutera: A. Koldioxid leds in i koncentrerad natronlut. B. Utspädd natronlut slås i vichyvatten. Vilka reaktioner sker? Mitt »idealkrav», att reaktionsformeln skall innehålla observerade reaktionsprodukter, kan inte uppfyllas, ty man ser ju ingenting. Man får alltså arbeta med sannolika och rimliga produkter. För reaktion A får vi, eftersom lösningen till att börja med är starkt alkalisk

$$CO_2 + 2Na^+OH^- \rightarrow H_2O + Na^+_2CO_3^{--}$$

alltså karbonatjoner i stället för hydroxidjoner. Formuleringen

$$H^+HCO_3^- + Na^+OH^- \rightarrow \ldots$$

som är naturlig för den, som lärt sig, att koldioxid i vatten ger en obetydlig mängd av kolsyrans primära joner, leder tanken till slutprodukterna H_2O och $Na^+HCO_3^-$ (som dock inte uppstår i första hand). Exemplet visar faran av att *formler*, inte kemiska *tankar*, får bestämma. »Språkets makt över tanken» kallas företeelsen av Tegnér.

För reaktion B är däremot

$$H^+HCO_3^- + Na^+OH^- \rightarrow H_2O + Na^+HCO_3^-$$

ett riktigt uttryck för det som sker i början: de ganska fåtaliga vätejonerna fångar in OH^-, allteftersom dessa kommer ner i vattnet. I samband med denna reaktion skall jag avhandla det som sker, när koldioxid leds in i vattenglas. Ger formuleringen

$$SiO_3^{--} + CO_2 + x\ H_2O \rightarrow SiO_2 \cdot x\ H_2O + CO_3^{--}$$

en god bild av förloppet? Om vi bortser från den avsevärda svårigheten att skriva korrekta formler för de joner, som finns i vattenglas ($HSiO_3^-$?, $H_2SiO_4^{--}$?, $H_3SiO_4^-$?) och för det utfällda geléet, kan vi fråga, om karbonatjoner har uppstått. Med en indikator kan vi lätt följa pH-förändringen, och man finner, att fällning uppträder vid pH omkring 9. Då finns övervägande HCO_3^-. Såväl formuleringen

$$SiO_3^{--} + CO_2 + H_2O \rightarrow H_2SiO_3 + 2\,HCO_3^-$$

som (se föregående utläggningar om jonreaktioner)

$$Na^+_2SiO_3^{--} + H^+HCO_3^- \rightarrow H_2SiO_3 + 2\,Na^+HCO_3^-$$

ger trots förenklingen med själva kiselsyran en riktigare bild.

Troligen har flera lärare än jag sett, att reaktionsformeln för förloppet, då en oxid »löses upp» i syra eller bas, bereder elever svårigheter. Orsaken till detta är nog i allmänhet, att de inte har absolut klart för sig, vad som finns i lösningen efteråt, utan försöker finna det genom kombination av formlerna ungefär som man »tänker» i en korsordsgåta. Om vi jämför

$$CuO + 2\,H^+ + 2\,Cl^- \rightarrow Cu^{++} + 2\,Cl^- + H_2O$$

med

$$As_2O_3 + 6\,H^+ \rightarrow 2\,As^{+++} + 3\,H_2O$$

så bygger den första på det faktum, att kopparjoner syns i lösningen, men den andra har inte samma underlag. Vad man ser är i bästa fall, att en droppe av $AsCl_3$ (en förening med kovalenta bindningar) visar sig. Borde inte formlerna i stället lyda

$$CuO + 2\,H^+ \rightarrow Cu^{++} + H_2O$$

och

$$As_2O_3 + 6\,H^+Cl^- \rightarrow 2\,AsCl_3 + 3\,H_2O$$

så att förändringarna framhålls?

Det finns några reaktioner, där frågan om den riktiga (eller åtminstone bästa) formeln inte är närmast formell som i de hittills givna triviala exemplen, utan ligger på ett annat plan. En sådan reaktion är utfällning av metallhydroxider med ammoniak. I min undervisning har jag ofta skrivit

$$Al^{+++}Cl^-_3+3H_4N^+OH^-\rightarrow Al(OH)_3+3H_4N^+Cl^-$$

vilket hyfsas till

$$Al^{+++}+3OH^-\rightarrow Al(OH)_3$$

Med denna enkla formelbild får man ett gott underlag för behandling av villkoret för uppkomst av en fällning (löslighetsprodukt, OH-buffert). Enligt Tekniska Högskolans »Kompendium i stökiometri m. m.» får formeln inte skrivas så, »ty man kan fälla ut mycket mera hydroxid än som svarar mot den lilla mängd OH-joner, som finns från början». Alltså en direkt försyndelse mot mitt krav om utgångsämnena. Detta uppfylls, om man skriver

$$Al^{+++}+3H_3N+3H_2O\rightarrow Al(OH)_3+3H_4N^+$$

men denna uppställning uppmuntrar kanske eleverna mer än den första att lita på minnet. Och de ser inte, att det väsentliga är en jonreaktion. Mycket elegant kan förloppet skildras som en syra-bas- reaktion, om man utgår från att Al-salt-lösningar är sura

$$Al(H_2O)_6^{+++}+3H_3N\rightarrow Al(H_2O)_3(OH)_3+3H_4N^+$$

Här måste då aquo-joner med riktiga koordinationstal föras in och i konsekvens med detta en komplicerad formel för fällningen. Utan tvivel är detta en mera betungande metod för eleverna.

Ett par diskutabla reaktionsformler

En särdeles remarkabel reaktionsformel är denna:

$$SnCl_2+2HCl\rightarrow SnCl_4+H_2$$

Mot formuleringen utan jonbeteckningar behöver ingen invändning göras — formlerna kan betyda vikter och volymer. Det förlopp som formeln vill beskriva är

$$Sn^{++}+2H^+\rightarrow Sn^{++++}+H_2$$

som skrives med elektroner i partialreaktioner

$$Sn^{++}\rightarrow Sn^{++++}+2e^- \text{ och } 2H^++2e^-\rightarrow H_2$$

varvid varje delförlopp för sig är riktigt. Men kan man lägga ihop dem till en riktig slutformel? En beräkning med hjälp av normalpotentialer säger, att trycket av det uppkomna vätet är så stort, att knappast en blåsa kan stiga upp från bottnen av ett provrör. Men reaktionsformeln har som en katt sju liv!.

Får en formel i en lärobok vara tvivelaktig, ifall den ändå har något att ge den som studerar boken? Är det t. ex. bokstavligen sant att reaktionen

$$2\,HBr \rightarrow H_2 + Br_2$$

sker eller är detta ett diskutabelt sätt att framhålla, att HBr är obeständig i jämförelse med HCl? Försök att framställa HBr och HCl ur bromid och klorid med svavelsyra ger ju som bekant olika resultat. Har den författare, som skriver

$$2\,H^+ + 2\,Br^- + \tfrac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O + Br_2$$

gett ett bättre uttryck för bromvätes egenskaper?

Redox-processer

Redoxreaktionerna ägnar man med rätta stort intresse åt i våra gymnasier. Angående formelskrivning säger de metodiska anvisningarna, att överläggningar över förändringar i oxidationsstadierna ger koefficienterna på ett överskådligt sätt. I detta uttalande kan man utläsa en rekommendation att använda sådana räknestorheter, som vi kallar valenstal eller oxidationstal. Den fullständiga formeln för t. ex. förloppen i en manganatsmälta (brunsten, klorat och soda) ser rätt avskräckande ut men kan på klart och enkelt sätt byggas upp i två etapper. Först avväges genom rent algebraiskt resonemang utgångsämnet, som skall oxideras (i vårt exempel brunsten), och oxidationsmedlet mot reaktionsprodukterna

$$\overset{+4}{Mn}O_2 + K\overset{+5}{Cl}O_3 + \ldots \rightarrow Na_2\overset{+6}{Mn}O_4 + K\overset{-1}{Cl}\ldots$$

Mn upp 2 steg, Cl ned 6 steg, alltså 3 Mn mot 1 Cl, dvs 3 MnO_2 och 3 Na_2MnO_4. Därefter fylles behovet av Na i manganatet:

$$\ldots\ldots + 3\,Na_2CO_3 \rightarrow \ldots + 3\,CO_2$$

Om man vid den första genomgången tydligt håller de båda etapperna från varandra, lär sig eleverna förfaringssättet utan svårighet — de är från matematiken och fysiken vana att arbeta med betydligt mera krävande kalkyler!

En svår uppgift även för en duktig gymnasist är emellertid att skriva en korrekt formel för den reaktion, då permanganat i en sur lösning av tenn(2)klorid ger en kraftig vit fällning. Förutsättningarna är att han vet, att permanganat i sur lösning »går ner» till Mn^{++}-jon och att han förstår, att fällningen måste vara SnO_2. Svårigheten torde nu framförallt vara, att han frestas att skriva som utgångsläge

$$MnO_4^- + Sn^{++} + H^+ \rightarrow \ldots$$

»Överläggningar över oxidationsstadierna» ger

$$2MnO_4^- + 5Sn^{++} \ldots \rightarrow 2Mn^{++} + 5SnO_2 \ldots$$

och därefter skall jonladdningarna jämnas ut. Vänstra sidan har, när själva redoxförloppet nu formulerats riktigt, ett överskott på 4 positiva laddningar. Det finns flera formella möjligheter att få formeln att »stämma»; bara en av dessa är rimlig: att skriva $4H^+$ på högra sidan. Vätejonerna kommer från vattnet, och 2 H_2O behövs på vänstersidan. Det finns anledning att framhålla, att det vore principiellt fel att försöka jämna ut genom att räkna syreatomer — syre har nämligen redan varit med i överläggningarna, då man använde valenstalen.

Sillén har visat, att formler för alla redoxförlopp i vattenlösning kan härledas med tillhjälp av elektroner e^-, vatten H_2O och vattnets joner H^+ och OH^-. Behandlingen blir formellt elegant men ibland onödigt krånglig med många partialreaktioner. Det har frapperat mig, att elektronen e^- vid detta sätt att härleda formler egentligen fungerar som ett minustecken utan materiell betydelse, en symbol för ett generellt reduktionsmedel. Det är rent av svårt att veta ibland, vad dessa elektroner som man räknar med, har för sig. Har t. ex. verkligen kolatomen förlorat fyra elektroner vid reaktionen

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 \quad ?$$

Några av dessa och besläktade problem har tidigare avhandlats i Elementa och jag får hänvisa den intresserade till dessa artiklar. Detta gäller också en uppsats om strukturformler, där bl. a. valensstreckens betydelse som symboler berörs.

Molekyl- och atom-modeller

Ett utmärkt hjälpmedel har kemiläraren fått i de nya typer av molekylmodeller, som nu finns i handeln till skäliga priser (kalottmodeller enligt Stuart och Briegleb). I dessa modellsatser finns olika klossar, som motsvarar kolatomer, syreatomer o. s. v. i olika bindningar (alifatiska kol, etylenkol o. s. v.) enligt vetenskapliga mätningar. Modellerna blir därför synnerligen naturtrogna med riktiga intramolekylära avstånd och valensvinklar. Det finns f. ö. också satser att bygga kristallgitter av, men dessa är dels dyrare, dels inte så mångsidigt användbara. (Om modeller i kemiundervisningen se en uppsats av Hedelius.) Goda modeller av molekyler och kristaller ger oss en möjlighet att låta våra elever få en uppfattning av materiens byggnad, ett av de stora målen för skolans naturvetenskapliga undervisning.

Det återstår att säga något om atomen, kemistens byggsten. För Dalton var en atom principiellt odelbar — och rent stökiometriskt är

det väl förfarande så. För Bragg var alltid en atom en liten röd kula! Den pedagogiska litteraturen är full av atommodeller, alltifrån de enfaldigaste, där atomerna har armar och ben till de mycket raffinerade med elektronladdningar svepande i elliptiska banor runt en kärna. Men naturvetenskap är vetenskapen om det mätbara, och alltså finns det inga elektronbanor. Det förefaller mig vara förståndigt att man f. n. inte gör konkreta modellföreställningar om detaljer i atombyggnaden. I Journal of Chem. Educ. 1956, sid. 68, finns en uppställning av det periodiska systemet på vågmekanisk grund. »The chemical and physical properties of the elements are periodic functions of the energy sequence of atomic orbitals». Termen *orbital* (eng. *orbit* betyder omloppsbana) härstammar från Bohrs atomteori, men man måste — som det påpekas bl. a. i den citerade artikeln — komma ihåg, att den inte betyder någon bestämd bana, där en elektron rör sig, utan är en funktion, som anger den sannolika fördelningen av elektronladdningarna i en tredimensionell rymd. För tvåbetygskursen i kemi i ämbetsexamen får vi inom den närmaste tiden en ny lärobok, där det Bohrska planetsystemet fått ge vika för orbitaler vid behandling av den kemiska bindningen. Det blir på det sättet kanske inte lättare, men rättare.

Litteratur:

I Elementa har tidigare publicerats bl. a. följande artiklar:
Englund: Kemisk formelskrivning, *28*, 74; *31*, 10 och *32*, 122.
— Strukturformler, *37*, 165.
Grimsell: Redoxreationer och valens, *32*, 9.
Hedelius: Modeller för kemiundervisning, *41*, 121.
Samén: Organiska föreningar och valenstal, *32*, 126.
Sillén: Kemiska reaktionsformler: *28*, 209 och *29*, 13.
Wideqvist: Om oxidationstal vid organiska föreningar, *37*, 250.

Egenskaper ved kjeglesnitts-tangenten

Av lektor O. Lindstad, Oslo

Beregningene i denne artikkel er ment å kunne brukes ved undervisningen i matematikk i real-gymnaset, særlig hvis man har med flinkere elever å gjöre. Med hensyn til de grense-betraktninger som förer til formlene (3) trengs antagelig veiledning fra lærerens side, helst på forhånd. Det bemerkes at de resultater som er formet i (3) er meget anvendelige også ellers i geometrien (ikke bare når det er tale om kjeglesnitt), så de har sin berettigelse også av den grunn.

I. På fig. 1 er K en kjeglesnitts-kurve med F som brennpunkt og D som tilhörende styrelinje. Det löpende punkt på kurven er P, og tangenten i dette punkt er TT. Videre er s buelengden OP, hvor O er et valt origo på kurven. De andre bokstaver trenger neppe noen forklaring. Er e eksentrisiteten, har vi ligningen

$$r = e \cdot d \tag{1}$$

Både r og d er funksjoner av s, og vi deriverer (1) med hensyn til s.

$$r' = e \cdot d' \tag{2}$$

Ved hjelp av grense-betraktning innser man at

$$r' = \cos \alpha_r \text{ og } d' = \cos \alpha_d \tag{3}$$

og settes dette inn i (2), får vi disse enkle formler

$$\frac{\cos \alpha_r}{\cos \alpha_d} = e \text{ eller } \frac{\cos \alpha_r}{\cos \alpha_d} = \frac{r}{d} \tag{4}$$

Vi vil skrive dette på en annen måte: Langs tangenten PQ avsettes et linjestykke t, se fig. 2, og projeksjonen av t på henholdsvis r og d kalles t_r og t_d. Vi får da av (4)

$$\frac{t_r}{t_d} = e \text{ eller } \frac{t_r}{t_d} = \frac{r}{d} \tag{5}$$

Vi vil nå velge t lik PQ, hvor Q er skjærings-punktet mellom tangenten og styrelinjen. Da er $t_d = d$, og av (5) följer at $t_r = r$. Vinkelen PFQ er altså en rett vinkel.

Denne egenskap hos kjeglesnitt, at vinkelen PFQ er en rett vinkel, kan brukes til konstruksjons-oppgaver, og vi skal se på noen eksempler: 1) Gitt er et brennpunkt, den tilhörende styrelinje og et punkt på

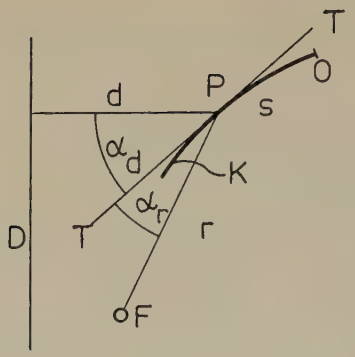


Fig. 1.

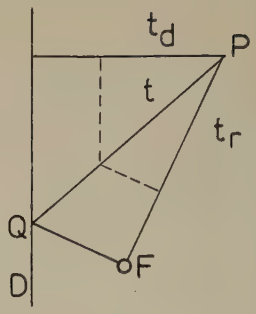


Fig. 2.

kjeglesnitts-kurven. Konstruer tangenten i punktet. 2) Gitt er et brennpunkt og symmetri-aksen gjennom dette. Videre er oppgitt et punkt på kurven og tangenten i punktet. Konstruer styrelinjen. — Som man lett innser, kan det også lages flere oppgaver ved hjelp av fig. 2.

II. Til real-gymnasets pensum i matematikk hörer följende setning om kjeglesnitt: Tangenten danner like store vinkler med brennpunkt-radiene. Vi regner her bare med de spisse vinkler mellom linjene. (Denne formulering av setningen gjelder også for parabelen, da den kan oppfattes som et spesial-tilfelle av ellipse.) Vi kan utlede denne egenskap meget enkelt ved lignende betraktning som i **I**.

Kalles brennpunkt-radiene for ellipsen og hyperbelen r_1 og r_2, har vi for den förste at r_1+r_2 er konstant, mens det for den siste kurve er r_1-r_2 som er konstant. Idet vi deriverer med hensyn til s får vi i begge tilfelle

$$|r_1'|=|r_2'| \tag{6}$$

Tangentens vinkler med brennpunkt-radiene kalles α_1 og α_2, og bruker vi den samme grense-betraktning som i (3), får vi

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2 \text{ eller } \alpha_1=\alpha_2 \tag{7}$$

Vi kan ikke uten videre anvende dette resultat på parabelen, da (6) ikke har noen mening for denne kurve, men må undersöke den spesielt. For parabelen (se fig. 1) er $r=d$, og da er

$$r'=d' \tag{8}$$

Av (3) följer at

$$\cos\alpha_r=\cos\alpha_d \text{ eller } \alpha_r=\alpha_d \tag{9}$$

Som vi har sett, er formel (4) i **I** og formlene (7) og (9) i **II** utledet på analog måte (ved hjelp av samme grense-betraktning). Men sammenhengen kan også sies på en annen måte: Formel (4) gir uttrykk for en generell egenskap som inneholder (7) og (9) som spesialtilfeller. Hvis nemlig (4) anvendes på begge brennpunktene i et sentralkjeglesnitt (med de tilsvarende to styrelinjer), får vi, når indeksene 1 og 2 brukes på de to systemer

$$\frac{\cos(\alpha_r)_1}{\cos(\alpha_d)_1} = \frac{\cos(\alpha_r)_2}{\cos(\alpha_d)_2} \tag{10}$$

Da de to styrelinjer er parallelle, er nevnerne i (10) like store. Altså er også tellerne like, og herav følger at

$$(\alpha_r)_1 = (\alpha_r)_2$$

dvs. det samme resultat som uttrykkes i (7).

At (9) for parabelen er en direkte konsekvens av (4) sees uten videre.

Tangentteoremet

Av lektor Conrad Lönnqvist, Södertälje

Tangentteoremet kan på enkelt sätt härledas genom delning av toppvinkeln i en likbent triangel.

Om man i den likbenta triangeln ABC (fig. 1) med kända sidor sammanbinder en punkt D på basen med toppvinkelns spets B, kan man på olika sätt beräkna toppvinkelns delar. I figuren betecknas dessa delar x och y och motsvarande delar av basen m och n. Man erhåller lätt ekvationen $\sin x / \sin y = m/n$, där $x+y=B$. Lösningen av denna ekvation kräver kännedom om trigonometriska formler. Men man kan

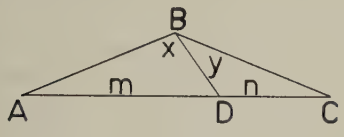


Fig. 1

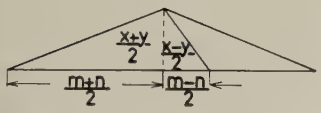


Fig. 2

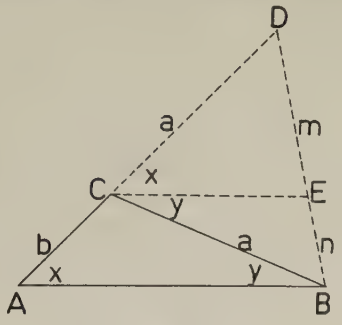


Fig. 3

undgå denna svårighet genom att enl. fig. 2 dra höjden mot basen och med hjälp av rätvinkliga trianglar beräkna de båda vinklarna.

Man kan emellertid ur fig. 2 även få fram ett samband mellan x, y, m och n av samma form som tangentteoremet. Vinklarna på ömse sidor om höjden blir tydligen $\frac{1}{2}(x+y)$ och $\frac{1}{2}(x-y)$ och motstående kateter $\frac{1}{2}(m+n)$ och $\frac{1}{2}(m-n)$.

Ur de rätvinkliga trianglarna får man

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{\frac{m-n}{2}}{\frac{m+n}{2}}=\frac{m-n}{m+n} \tag{1}$$

Ur denna relation erhålles tangentteoremet på följande sätt.

I triangeln ABC (fig. 3) med de kända sidorna a och b och den kända vinkeln C förlänger man AC, så att $CD=BC=a$. Om man nu delar den likbenta triangeln BCD med transversalen $CE \| AB$, erhåller man en sådan delning av denna triangel, att man omedelbart kan använda ekv. (1).

Då $x=A$, $y=B$ och $m:n=a:b$, erhålles tangentteorement

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{a-b}{a+b}$$

Bokanmälningar

Philip L. Alger, *Mathematics for Science and Engineering.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1957, Pp. 360, $ 5.50.

Alger är icke ren matematiker utan konsulterande ingenjör vid General Electric Company. Han bygger sin bok på den berömde elektroteknikern Charles P. Steinmetz' bok »Engineering Mathematics», vars första upplaga utkom 1911. Steinmetz (1865—1923) införde som bekant de komplexa talen som ett grundläggande matematiskt hjälpmedel i växelströmsläran. Han var en lysande lärare, och Alger är en av hans elever. Av bokens fjorton kapitel är endast fyra helt nyskrivna, de övriga följer mer eller mindre troget Steinmetz' lärobok.

Kapitlen har följande rubriker: aritmetik, trigonometri, komplexa tal, algebraiska ekvationer, oändliga serier, numeriska beräkningar, empiriska kurvor, differentialer och integraler, funktioner, trigonometriska serier, maxima och minima, differentialekvationer, sannolikhetskalkyl, matematiska modeller och elektriska kretsar. Dessutom tillkommer ett Appendix med nio olika tabeller. Varje kapitel avslutas med övningsexempel (inalles 228) och litteraturhänvisningar. Särskilt

de senare är mycket värdefulla. Inte mindre än 116 läroböcker från de flesta av matematikens områden är nämnda, och det viktigaste av den anglosachsiska lärobokslitteraturen torde vara medtaget.

Som synes av kapitelförteckningen innehåller Algers bok mycket i förhållande till omfånget. Den vill i en enda volym sammanfatta det som man vanligen behöver en hel hög av läroböcker till. Den är främst avsedd för tekniska studerande vid colleges men även som ett supplement till matematikläroböckerna vid gymnasier och högskolor. Man kan läsa boken med mycket små förkunskaper, ungefär svensk folkskola med träning i bokstavsräkning — satsen om triangelns vinkelsumma bevisas bl. a. — och dock hinner författaren på 334 sidor igenom sitt stora program, »80 % av all den matematik som en ingenjör behöver för sin framtida gärning», vilket i vissa fall betyder moment utöver 2-betygskursen vid våra universitet. Hur går sådant trolleri till? Låt oss se på kapitlet Trigonometri. Det innehåller på 23 sidor allt som finns i våra svenska läroböcker (utom trigonometriska ekvationer), men också litet till, arcusfunktioner och »polyfasrelationer». Trolleriet består i att förf. går rakt på sak. De trigonometriska funktionerna definieras direkt för g o d t y c k l i g a vinklar med hjälp av den rörliga radiens projektioner, ej med koordinater; ett riktigt grepp, tycks det mig. Formeln för sin $(\alpha+\beta)$ bevisas av en enkel hopläggning av två sträckor, etc. Någon gång kan framställningen bli väl summarisk, t. ex. vid tillämpningen av sinus- och cosinusteoremen, men i stort sett är allt omsorgsfullt utrett, särskilt alla de viktiga transformationsformlerna.

Kapitlet om komplexa tal är av särskilt intresse med tanke på Steinmetz' insats. Här använder förf. också metoden »greppet direkt». Utan att bekymra sig om det moderna, något tunga sättet med talpar tolkar han de komplexa talen som »directed numbers» och kommer snabbt in på deras egenskaper. Han hinner på de 35 sidorna med inte bara teorien, omfattande även logaritmerna, utan kan också ägna en tredjedel av utrymmet åt detaljerat utförda tillämpningar på angturbiner och växelströmskretsar samt en kort utblick mot tredimensionell vektoranalys.

En fin detalj är kapitlet om numeriska beräkningar. Ett sådant saknas i allmänhet i läroböckerna för högskolestadiet.

Grunderna för differential- och integralkalkylen har fått ett enda kapitel, och det har blivit väl hopträngt. Teknikernas vanliga benägenhet att inte klart skilja på dy och Δy har inte heller Alger undgått. Integrationsmetoder har han inte ägnat så stor uppmärksamhet åt utan har i stället i appendixet ställt upp en samling av 126 färdiga integrationsformler.

Att två framstående elektrotekniker skrivit läroboken har medfört

att alla däri behandlade matematiska områden belyses av intressanta fysikaliska tillämpningar, framför allt från växelströmsläran, elektroniska räknemaskiner och »network models». Tillämpningarna är förklarade så, att icketekniker kan avnjuta dem.

Jag vill varmt rekommendera Algers bok till alla matematiker, den har mycket att ge oss av »beslutsamhetens friska hy», och till alla fysiker och tekniker, som i en enda bok kan få en överblick över nästan all den matematik de behöver, samt till gymnasiets lärare, som bör ha glädje av de friska oformalistiska tagen och alla tillämpningarna. Som lärobok borde den vara särskilt lämplig för en förenklad högskolekurs, t. ex. för de danska »akademiingenjörerna» eller för de »industrihögskolor», som kanske blir ett nytt inslag i den tekniska utbildningen i Sverige. *Einar Lunell*

R. H. Atkin, *Mathematics and Wave Mechanics.* William Heineman Ltd, London, 1956. Pp. XV+348, 30 s. net.

Detta är på sitt sätt en imponerande bok. Förf. har på det begränsade utrymmet lyckats pressa in en sammanhängande kurs — med härledningar och bevis — som startar med reella tal, gränsvärden och serier och slutar med kvantkemi, statistik och kvantiserad fältteori. Avsikten är att i samlad form presentera den matematik som utöver skolkunskaperna kan behövas som bakgrund för studier i kvantmekanik. Härvid får den studerande inte bara stifta bekantskap med analys, algebra och differentialekvationer utan också med klassisk mekanik, relativitetsteori och teorien för det elektromagnetiska fältet, varjämte han på de sista 150 sidorna finner en genomgång av ren kvantmekanik med tillämpningar. Urvalet kan kanske på några punkter diskuteras, men det är inte mer än naturligt för en bok av denna typ.

Framställningen är vanligen klar och koncis men givetvis genomgående knapphändig; stora delar av de inledande kapitlen torde därför närmast få användning som någon sorts repetitorium. Den allvarligaste invändningen är emellertid att förf. inte tänkt ordentligt igenom alla detaljer, detta trots att man nog annars får intryck av ett omsorgsfullt arbete. Ett flagrant exempel är de helt missvisande fantasierna på sid. 217 om att H och Q skulle kommutera. Kanske hänger förf:s resonemang här samman med uraktlåtenheten att skilja mellan Heisenberg- och Schrödingerbild. På det hela taget är de förekommande slarvfelen ibland sådana att läsarens förtroende för förf. kan komma i farozonen. Detta är synd på en annars trevlig och ambitiöst upplagd lärobok, som nu måste rekommenderas med en kraftig nypa salt. — På plussidan kan bl. a. antecknas ett stort antal övningsexempel. *S. Bertil Nilsson*

E. S. Smith/M. Salkover/H. K. Justice, *Calculus.* Second Ed., J. Wiley, New York, Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 520, $ 6.50.

Innehållet i de elva första kapitlen i denna lärobok synes mycket väl motsvara den kurs i differential- och integralkalkyl, som läses vid våra tekniska läroverk. Till att börja med behandlas derivering och integration endast av polynom, vilket har den pedagogiska förtjänsten att eleven tidigt får vänja sig vid t. ex. integralbegreppet. Vid behandlingen av brutna rationella och transcendenta funktioner erhålles sedan en repetition av grundbegreppen. I bokens åtta återstående kapitel behandlas oändliga serier, potensserieutvecklingar, analytisk geometri i rummet (utan vektorer), partiella derivator och multipelintegraler. Framställningen åtföljes av ett stort antal genomräknade exempel och tillämpningar.

Författarna deklarerar i förordet, att de försökt vara ärliga mot läsaren. Vid sådana framställningar, som på detta stadium ej kan behandlas stringent, har detta förhållande ej camouflerats utan klart angivits med den förhoppningen, att de bättre eleverna skall stimuleras till fortsatta studier. Sålunda meddelas många satser utan bevis. Sammanlagt innehåller boken cirka 2800 övningsuppgifter, med svar till de med udda ordningsnummer. Boken kan rekommenderas framför allt till de tekniska läroverkens referensbibliotek. *Lennart Råde*

Edwin M. Hemmerling, *College Plane Geometry.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 310, $ 4.95.

Sedan några år pågår i USA en livlig pedagogisk debatt om den elementära matematikundervisningen. En omfattande försöksverksamhet bedrivs, nya läroböcker introduceras i växande takt och med alla medel verkar man för att intressera ungdomen för matematiska och naturvetenskapliga studier. Hemmerlings bok är en representant för den nya typ av amerikanska läroböcker, som utmärks av att författaren med nästan ängslig iver pekar på matematikens användbarhet i det dagliga livet.

De som hävdar att den s. k. medövningen är av väsentlig betydelse har en varm anhängare i författaren, som menar att den som studerat geometri lättare än andra upptäcker oklarheter och cirkelbevis i politiska resonemang och i propaganda av olika slag.

Boken omfattar ungefär vår realskolas kurs i plan geometri och stereometri vartill kommer ett kapitel om geometriska orter, där även kägelsnitten definieras, samt ett kapitel om trigonometri i rätvinkliga trianglar. Framställningen är mycket utförligare än vad som är vanligt hos oss. Texten lättas upp av historiska notiser och exempel med fullständiga lösningar. Boken är rikt illustrerad, bland annat med foto-

grafier. De många trevliga övningsuppgifterna, vilka ofta presenteras i form av en figur med vissa data, ger ett stimulerande intryck.

I vissa fall synes resonemangen emellertid litet lösliga. Definitionen av irrationellt tal, vilket begrepp nämns i samband med π, är inte korrekt. Redan i första kapitlet, innan läsaren ens påbörjat sina geometristudier, görs det geometriska beviset till föremål för studium. Olika resonemangsmetoder diskuteras varvid huvudsakligen icke-geometriskt material kommer till användning. Behovet av entydigt definierade begrepp visas genom exempel. Den matematiska sanningen jämförs med sanningen i vardagliga påståenden. En övning utformas t. ex. på följande sätt: Klassificera följande uttalande och ange om satsen alltid är sann, ofta är sann, är sann då och då, sällan sann eller aldrig sann.

1. Flickor strävar efter att likna sina mödrar.
2. Politiker avger under valkampanjerna löften, som de aldrig har för avsikt att hålla.
3. Professorer är tankspridda.
4. Gentlemän föredrar blondiner. osv.

Vad detta än må vara, plan geometri är det inte.

Även om man sålunda måste reservera sig på en del punkter, har författaren i sin medryckande optimism och oförskräckthet då det gäller att »throw out the dead wood» åtskilligt att ge läsaren.

Per Häggmark

H. G. Eggleston, *Problems in Euclidean Space.* Pergamon Press, London, 1957, Pp. viii+165, 40 s. net.

Det geometriska begreppet konvexitet inrymmer något fascinerande. Trots enkelheten i definitionen har det använts för mycket djuplodande undersökningar. Författaren till denna bok har som underrubrik Application of convexity, och konvexiteten får sin användning i nästan samtliga problem som behandlats och lösts. Han behandlar ett tiotal problem, sammanfattade till fyra kapitel och anger, att konvexitetsbegreppets användning blir större för varje nytt kapitel. Endast i det första problemet ser man intet av konvexiteten, men sedan används den genomgående. Det skulle ta för mycket utrymme att redogöra för samtliga behandlade problem, varför jag här endast vill nämna ett par, icke för att framhålla dem framför de övriga utan därför att de intresserat mig personligen mest.

I det femte problemet sysslar förf. med approximation av plana konvexa kurvor och visar djupliggande satser om polygonapproximation av plana konvexa kurvor, varvid han utgår från ett par satser av Dowker i Fejes Toths bok: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Han jämför här tre olika metoder att mäta noggrann-

heten i approximationen, nämligen med tillhjälp av ytan, perimetern och punktavstånden, och visar, att »kurvavståndet» är en konvex funktion av sidoantalet hos den approximerande polygonen, när man utgår från perimeteravståndet men icke nödvändigt behöver vara det för punktavståndet. För ytavståndet är konvexiteten redan påvisad av Dowker.

Det tionde problemet är ett överlagringsproblem. En liksidig triangel skall så tätt som möjligt täckas av andra liksidiga trianglar av varierande storlek och orienterade i motsatt led mot den ursprungliga. Han visar, att den »överblivna» delen av den givna triangeln har Hausdorff-dimensionen minst log3/log2 och att dess mått i denna dimension är åtminstone 1/3.

Bokens innehåll är mycket större än de 165 sidorna låter en ana och den är väl värd att studera. Bevismetoderna är elementära, och bevisen blir av denna orsak kanske en aning långa, men elegansen finns där, och man kan nog instämma i förlagets slutord: A book for the advanced student and those concerned with research in pure mathematics.

Arne Pleijel

C. W. Churchman/R. L. Ackoff/E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research.* Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1957. Pp. 645, $ 12.00.

Operations Research for Management. The Johns Hopkins Press, Baltimore. Vol. I (Ed. by J. F. McCloskey and F. N. Trefethen), 1954, Pp. 409, $ 7.50. Vol. II (Ed. by J. F. McCloskey and J. M. Coppinger), 1956, Pp. 563, $ 8.00.

Operationsanalysen och företagsledningen. Orienterande uppsatser. Ekonomens särtryckserie II, 84 sid., kr. 7:50.

A Comprehensive Bibliography on Operations Research. Through 1956 with supplement for 1957. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 188, $ 6.50.

R. D. Luce/H. Raiffa, *Games and Decisions.* Introduction and Critical Survey. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1957. Pp. 507, $ 8.75.

A. Vazsonyi, *Scientific Programming in Business and Industry.* Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 474, $ 13,50.

Philip M. Morse, *Queues, Inventories and Maintenance.* Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 202, $ 6.50.

F. Pollaczek, *Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente a un guichet et par des phénomènes apparentés.* Mémorial des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, Paris 1957. 123 p., 2500 fr.

L. G. Peck/R. N. Hazelwood, *Finite Queuing Tables.* Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 210 $ 8.50.

Operationsanalys är ordet för dagen bland militärer, industrimän, matematiker och statistiker. Troligen inte bara ett flyktigt ord utan ett ord för morgondagen.

Operationsanalys sysslar med analys av operationer i vidsträckt mening. Så lyder definitionen, enkel men oklar. Något klarare uttryckt: Målet är att finna optimum för den studerade organisationen, mätt i pengar eller något annat effektivitetsmått. Problemen överflödar. Hur skall ett flygplan bestyckas? Vilka produkter bör tillverkas? Hur stort bör lagret vara? Hur många biträden behövs i butiken? Karakteristiskt för all operationsanalys är den noggranna problemformuleringen, det systematiska angreppet, användandet av kvantitativa metoder och utnyttjandet av matematisk och statistisk metodik, så snart någon möjlighet erbjuder sig.

Operationsanalys innebär icke något principiellt nytt; kvalificerad utredningsteknik har förnuftigt folk använt i alla tider. Det nya är väl främst ordet, som kraftigt stimulerat praktikerna att röra om i stillastående vatten och teoretikerna att flytta fram positionerna.

Aktiviteten bland operationsanalytikerna är stor, särskilt i USA och England. Litteraturen vittnar härom. Ett knippe böcker skall här kort presenteras, samtliga av god klass, vilka belyser olika sidor av operationsanalysen och dess hjälpvetenskaper.

»Introduction to Operations Research» är ett uppslagsverk som systematiskt beskriver problemformulerandets och »modellbyggandets» konst. De flesta av de teoretiska hjälpmedlen finns här behandlade, delvis matematiskt ytligt men genomgående vederhäftigt. Litteraturöversikten är mycket användbar för var och en som vill grundligt tränga in i ämnet. Ett å tvåbetygskunskaper i matematik erfordras.

»Operations Research for Management» passar utmärkt för länstolsläsning. Den innehåller bl. a. ett stort antal uppsatser med praktikfall från industrien, m. m., flera mycket läsvärda, några briljanta. De teoretiska avsnitten är däremot delvis svaga. Inga förkunskaper behövs utöver allmän kännedom om industriella tänkesätt.

För en första orientering anbefalles särtrycket från Ekonomen. Ett tiotal svenska ekonomer, statistiker och ingenjörer medverkar med amerikanskt lånegods och några svenska originalexempel. En inledning har skrivits av amerikanen Churchman.

Bibliografien från Wiley — i likhet med Morses och Peck/Hazelwoods böcker utgiven i samarbete med Operations Research Society of America — innehåller ca 3000 nummer och täcker, som naturligt är, amerikanska tidskrifter bättre än europeiska. Gränsdragningen är flytande och vittnar om svårigheten att klart definiera operationsanalys. Korrekturläsningen är bristfällig, av stickprov att döma. (En upp-

sats av D. V. Lindley har påträffats dels under rätt begynnelsebokstav, dels under F med stavningen Findley. Hur kan sådant passera?)

Spelteori är ett av operationsanalytikernas mera speciella hjälpmedel. Boken av Luce och Raiffa diskuterar bl. a. värdeteori utförligt. Den är avancerad i begreppsbildningen och kräver av läsaren både matematisk och filosofisk skolning. De flesta torde föredra att närma sig ämnet längs mera lättgångna vägar (se t. ex. anm. av Williams' populära arbete, Elementa, *37*, 1954, 268).

Mathematical programming är en ny, mycket omtalad teknik (jmf Elementa, *37*, 1954, 267). Teorien har utvecklats mycket snabbt och är av intresse även från renodlat teoretiska utgångspunkter. Vazsonyis bok behandlar transportproblemet, simplexmetoden och det nyaste om statistisk lager- och produktionsplanering. Den är ett pedagogiskt mästerstycke, men läsaren får betala många dollar för utförligheten. De fyra räknesätten räcker fuller väl som förkunskaper, även summatecknet förklaras omsorgsfullt.

Köteori har använts med betydande framgång — inte minst ur ekonomisk synvinkel —, ursprungligen inom telefontekniken, på senare tid även inom industrien. Pollaczek är en av föregångsmännen och gjorde stora teoretiska insatser på 1930-talet, långt innan amerikaner och engelsmän uppmärksammat köproblemens allmänna betydelse inom operationsanalysen. Hans nya arbete är intressant för den avancerade matematikern på grund av dess generella karaktär; andra göre sig ej besvär.

»Tvåbetygsmatematikern» eller den teoretiskt intresserade ingenjören med motsvarande kunskaper har mer att hämta i boken av Morse. Det är en charmant introduktion till ett charmerande ämne.

Den renodlade praktikern som sysslar med köer behöver främst numeriska resultat. År 1947 publicerade Conny Palm värdefulla tabeller i Industritidningen Norden, som nordiska ingenjörer bl. a. utnyttjat för att lösa textila arbetsproblem. Det är tillfredsställande att ett stort modernt tabellverk nu utgivits av Wiley. Tabellerna omfattar väntetidsberäkningar för grupper om 4—250 enheter, (varför inte även 2 och 3?), betjänade av 1—231 arbetare. Synd bara att referenser saknas i inledningen. Den amerikanska publiken borde få veta litet om t. ex. Erlangs och Palms banbrytande arbete på köområdet.

Nio böcker har här radats upp i en kö som pockar på läsarens uppmärksamhet. Lyxvaror som man bör gå förbi? Ingalunda. Snart är operationsanalys en nödvändighetsvara för många. Vi har inte råd med mindre.

Gunnar Blom

NIELS BOHR, *Atomteori og Naturbeskrivelse.* J. H. Schultz, Köpenhamn, 1958, 96 s., dkr 9:50. *Atomic Physics and Human Knowledge.* John Wiley & Sons, New York, 1958, Pp. 101, $ 3,95.

Atomteori og Naturbeskrivelse innehåller några av professor Bohrs föredrag från 1920-talet, medan Atomic Physics and Human Knowledge är en översättning av en några månader tidigare utgiven sammanställning av föredrag, kallad Atomfysik og menneskelig Erkendelse, vilken tidigare har recenserats i Elementa *41*, 139, 1958. Artiklarna i det förstnämnda arbetet beskriver ett stadium i atomfysiken, som alltjämt är av grundläggande betydelse för förståelsen av den därpå följande utvecklingen. Ur pedagogisk synpunkt är det värdefullt, att böckerna har utgivits vid en tidpunkt, då atomfysikens elementa i allt större omfattning kommer att införas på skolschemat. Den vackra språkbehandlingen gör, att uppsatserna onekligen är lätta att läsa, men den största behållningen får den, som på förhand är väl förtrogen med ämnet. Genom deras översiktlighet och uppenbara prägel av en stor fysikers djupa inlevelse i ämnet är dock båda böckerna av stort värde även för de läsare, som kanske inte till fullo kan tillgodogöra sig alla delar av framställningen.

I Atomfysik og Naturbeskrivelse finner man fyra uppsatser och en inledande översikt. Den första uppsatsen, Atomteori og Mekanik, ger i sammanträngd form en översikt av kvantteoriens utveckling fram till Heisenbergsrelationen. Här behandlas de Bohrska postulaten och korrespondensprincipen. — I den andra artikeln, Kvantepostulatet og Atomteoriens seneste Udvikling, påvisas att grundpostulatet om verkningskvantats odelbarhet framtvingar en beskrivning av iakttagna företeelser, som är komplementär i den meningen, att varje användning av klassiska begrepp utesluter en samtidig användning av andra klassiska begrepp, vilka också är nödvändiga för en kausal beskrivning av fenomenet. I samband härmed står den växelverkan mellan föremål och iakttagelsemetod, varigenom en efterföljande mätning i viss mån berövar oss de upplysningar, som en föregående mätning givit oss. — Kvantteoriens filosofiska konsekvenser behandlas i den tredje uppsatsen, Virkningskvantet og Naturbeskrivelsen. Vi möter här i ny belysning den gamla sanningen, att det icke är fråga om att avslöja tingens »egentliga väsen»; det gäller i stället att söka efter samhörigheten i mångfalden av våra iakttagelser. — Samma problem behandlas även i sista uppsatsen, Atomteorien og Grundprincipperne for Naturbeskrivelsen, där förf. även ifrågasätter atomfysikens användbarhet vid behandlingen av biologiska problem.

Birger Grundström

Svensk Naturvetenskap 1956. Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok. Tionde årg. Stockholm 1957, 392 sid., inb. kr. 18:—.

Kai Siegbahn/Åke Nilsson, *Kärn- och elektronspinresonans.* NFR:s Årsbok. Supplement nr 1. Stockholm 1957, 69 sid., kr. 5:— (kr. 2:— vid samtidigt köp av årg. 10).

Svensk Naturvetenskap 1957-58. NFR:s Årsbok. Elfte årg. Stockholm 1958, 399 sid., inb. kr. 18:—.

(Böckerna kunna fås i bokhandeln eller genom inbetalning på forskningsrådets postgirokonto 18 36 96.)

Naturvetenskapliga forskningsrådets årsbok har från och med tionde årg. ändrat namn och utstyrsel (den är numera inbunden, och bandet är särdeles smakfullt), men karaktären är densamma som förut.

Tionde årg. inledes med en jubileumsartikel av professor Bertil Lindblad; rådet fyllde 10 år den 1 december 1956. Rådets ordförande har anledning vara till freds. Rådet har befordrat den svenska naturvetenskapens utveckling på ett sätt och i en omfattning som väl ingen vid rådets start vågade drömma om skulle vara möjligt för en statlig inrättning. Från rådets verksamhet kan Professor Parkinson inte hämta exempel.

Årgången innehåller två stora och fyra mindre översiktsuppsatser, alla utomordentligt intressanta. Professor Carl-Gustaf Rossby, den internationella meteorologiens nestor, bortgången förra året, har skrivit om aktuella meteorologiska problem (68 sidor), och laborator Bertil Kullenberg bidrar med en förtjusande blomekologisk uppsats (»Blommor och insekter», 63 sid.). Professor Kai Siegbahn och docent Åke Nilsson behandla magnetisk spinresonans; deras ämne har fått en utvidgad och mera fackmässig framställning i supplementbandet. Här skulle man vilja göra en liten anmärkning. När nu rådet ändå kostat på detta för såväl fysiken som för flera andra discipliner så viktiga ämne en separat skrift, så borde denna gjorts utförligare. Rådets sekreterare, Gösta W. Funke, tillika generalsekreterare i Atomkommittén, bidrar med »Aktuellt från atomenergiens fält», och professor Torbjörn Caspersson behandlar cancerforskning och biofysik. Uppsatsen »Aktuella önskemål inom svensk naturvetenskaplig forskning» (flera författare) kompletterar uppsatsen »Aktuella utvecklingslinjer inom naturvetenskapen» i nionde årg.

Av elfte årgångens innehåll vill man särskilt framhålla professor Börje Kullenbergs stora översikt »Aktuella problem inom oceanografien», kännetecknad av kristallklar stil. Övriga större uppsatser äro: »Aktuella problem inom limnologien» av laborator Wilhelm Rodhe, »Problemet om glacial övervintring» (flera förf.), »Sveriges geologiska undersökning inför sitt 100-årsjubileum» av överdirektör N. H. Magnus-

son, »Flygbilden som vetenskapligt hjälpmedel» av professor Gunnar Hoppe (en utomordentligt intressant uppsats), »Några tendenser i experimentell psykologi» av professor Gösta Ekman, »Den svenska trafiksäkerhetsforskningen» av fil. dr Gösta W. Funke och professor Bo Kjellberg. Under samlingsrubriken »Översikt över undersökningar, som utförts med stöd av rådet» finns en redogörelse av professorerna Per Ohlin och Kai Siegbahn för fysiska institutionens i Uppsala imponerande forskningsprogram.

Årgången innehåller en artikel av dr Funke, »Naturvetenskap — Humaniora», med några allmänna reflexioner såsom inledning till en planerad serie med syfte att belysa vissa problem av gemensamt intresse för naturvetenskap och humaniora (den första uppsatsen i serien är den ovannämnda av professor Ekman).

Dr Funke har förmodligen, i egenskap av rådets sekreterare, med sin uppsats i första hand velat fästa uppmärksamheten på en effektivitetsfråga; han belyser den nytta som naturvetare och likställda å ena sidan och humanister å andra sidan (administrativ klassificeringsgrund!) kunna få av att lära känna varandras arbetsmetoder och resultat. Men man tycker, att förf. tar sitt ämne väl ytligt. Skulle man inte kunna sträcka ambitionerna något längre och uttala en förhoppning om större förståelse bland såväl naturvetare etc. som humanister för de fundamentala problemen, dvs. för humanism i betydelsen världs- och livsåskådning med huvudvikten lagd vid det rent mänskliga? Anmälaren tror inte, att ytlig kunskap i »humaniora» gör naturvetaren, teknikern eller politikern så särdeles mycket mera dräglig.

Dr Funkes artikel innehåller även en löst påhängd reflexion om de tekniska läroverken. Dr Funke är bekymrad över att läroverksingenjörer i viss utsträckning vinna inträde vid de tekniska högskolorna, ett bekymmer på modet sedan någon tid. Dr Funke har under sin lektorstid i Norrköping observerat »det ringa intresse de studerande där har för humaniora, t. o. m. när det gäller för en ingenjör så nödvändiga ämnen som moderna språk». Han har emellertid förbisett, att det här är fråga om en sekundäreffekt. Klimatet i de tekniska läroverken bestäms väsentligen av de tekniska högskolornas alumner. Den nämnda sekundäreffekten kommer att försvinna i samma mån som de tekniska högskolorna hinna genomsyras av kärlek till Zeus' älsklingsdotter. — Man skall akta sig för att utestänga läroverksingenjörerna från KTH och CTH. Flera av våra främsta tekniker ha gått vägen tekniskt läroverk-teknisk högskola.

Till slut må det vara tillåtet att framföra ett tack till forskningsrådet för att det sistlidne termin tillställde läroverken dess sista årsbok att utdelas som premium »För Naturvetenskapligt Kunnande».

Torsten Jönsson

FRANCIS A. JENKINS and HARVEY E. WHITE, *Fundamentals of Optics.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1957, Pp. 637, $ 8.50.

De båda författarna publicerade 1937 första upplagan av Fundamentals of Physical Optics, 1950 utkom verket i till form och innehåll reviderat skick under namnet Fundamentals of Optics och 1957 förelåg tredje upplagan av denna välkända lärobok. Nyheterna i denna sista upplaga är få men väsentliga. Författarna har starkt velat poängtera de kvantmekaniska synpunkterna på ljusföreteelserna vid sidan av de klassiska, dvs. de geometriska och fysikaliskt optiska.

Bokens disposition är den väntade: geometrisk optik (169 s.), fysikalisk optik (397 s.), kvantoptik (16 s.), vilken uppdelning författarna även rubricerat som makroskopisk optik, mikroskopisk optik och atomoptik, en nomenklatur, som ej kan anses helt lyckad.

Fermats princip och dess skiftande formuleringar ägnas en inträngande men mycket lättfattlig analys. Vad man ytterligare önskat vore en anknytning till Hamiltons princip, närmast med tanke på författarnas strävan att understryka kvantmekanikens roll i modern optik. En svensk läsare finner mer nöje än uppskattning i uttrycket »linstillverkarens formel» för en tunn lins' brännvid. Huvudplan intar en central ställning i avbildningsläran, men varför endast då omnämna de gaussiska och utelämna de töplerska? »Tjock spegel» förefaller ej heller vara ett uttryck, som manar till efterföljd. I hög grad efterföljansvärt är däremot det avsnitt om 20 s., som ägnas bländare i optiska system, ävensom kapitlet om avbildningsfel, där det historiskt intressanta påpekandet göres, att redan Huygens upptäckt det aplanatiska punktparet vid en sfärisk yta.

Den fysikaliska optiken utgör, som traditionen i detta fall kräver, bokens dominerande del, där dock vissa avsnitt, såsom Huygens' princip med dess väsentliga kompletteringar av Fresnel och Fraunhofer, kunde getts en fylligare teori, andra, såsom bestämning av ljushastighet, en mera modern än historisk prägel. Fresnels och Fraunhofers välkända diffraktionsproblem är klart och koncist behandlade, och särskilt de förstnämnda är i denna framställning läsvärda, med god balans mellan teori och experiment. I denna nya upplaga har kapitlet om ljusets elektromagnetiska karaktär fått ett värdefullt tillägg: Čerenkovstrålning, dels därför att här föreligger ett exempel på elektromagnetisk utstrålning hos en elektron under speciella villkor och dels därför att denna strålning spelar en väsentlig roll i vissa kärnfysikaliska undersökningar (ex. identifikation av antiprotonen). För nästan alla i texten förekommande personnamn, såväl stora som mindre stora, anges i korta fotnoter upplysande data, Čerenkov utgör här ett onödigt undantag.[1] Strålningskällor, strålningslagar, absorption,

[1] Författarens recension inlämnades i augusti. (*Red.*)

spridning och dispersion ägnas i huvudsak en beskrivande redogörelse, polarisation och dubbelbrytning i en- och två-axiga kristaller även teoretiskt resonemang, magneto- och elektrooptiska effekter en elementär, klassisk behandling. Kvantoptiken rör sig givetvis om fotonbegreppet och de ljusfenomen, som är »korpuskulärt» betingade, Heisenbergs osäkerhetsrelation med de nu snart klassiska tillämpningarna och glädjande nog även om Bohrs komplementaritetsprincip.

Ett stort antal utmärkta illustrationer och exempel bidrar till bokens obestridliga värde. *Eve Staffansson*

R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*. Longmans, Green and Co, London, New York, Toronto, 1957, Pp. 534, 60 s. net.

Såväl denna bok som den av Jenkins och White behandlar titelmässigt samma områden. En jämförelse bjuder därför mycket av intresse. Den amerikanska framställningen lider långt ifrån av någon tyngande teori, innehåller ett lättfattligt koncentrat av det traditionella stoffet och präglas av ibland något flyktiga utblickar över den klassiska optikens gränsmarker, den engelska förefaller mera välkomponerad, men även den med utblickar dock mindre i antal och större i djup.

Fermats princip låter författaren vara den geometriska optikens utgångspunkt, men en onödig eftergift åt systematiken leder honom fram till en kort diskussion om negativa brytningsindices, för vilket rec. helt saknar förståelse. En samordning av refraktion och reflektion kan ske på andra grunder. Däremot noteras med glädje, att avbildning i optiska system baseras på en kortfattad men mycket välskriven framställning av den kollineära avbildningens principer, utmynnande i de karakteristiska systemstorheterna, huvud-, nod- och fokalpunkter jämte motsvarande plan. Strånga definitioner, goda illustrationer och noggranna beskrivningar över instrument och justerings- och mätmetoder är väsentliga bidrag i den geometriskt optiska delen.

Grunddragen av vågrörelselära som inledning till den fysikaliska optiken inbegriper även Fourierserier och Fourierintegraler, vilket är ett förtjänstfullt drag, speciellt som framställningen är utmärkt och tillägget i grund och botten fundamentalt under beaktande av ljusets fotonkaraktär. Sedan följer nästan alla 2-stråle-interferensfenomen tillsammans med interferens för lika lutning och tjocklek. Michelsons evaluering av metern i ljusvåglängder är ingående behandlat, och att kadmiumatomen fått träda tillbaka för kvicksilver- och kryptonatomer som bärare av den egentliga primärnormalen har författaren även berört. Huygens' princip har här, glädjande nog, kompletterats med Fresnels tillägg i matematisk form och med diskussion av vad däri

trots allt brister samt dessutom med Kirchhoffs strängare formulering jämte tillämpning. Gittret, spektroskopistens frekvensanalysator, är ävenledes ingående behandlat liksom bland mycket annat de ibland bekymmersamma spöklinjerna. Detta avsnitt är för den spektroskopiskt intresserade en mycket angenäm läsning såväl i avseende på innehåll som utformning. Trogen Drude och Försterling har författaren låtit Cornus i den fysikaliska optiken klassiska spiral inta sin rättmätiga plats. Mycket intresse bjuder även författarens framställning av bildalstring enligt den fysikaliska optiken, en i andra verk ofta felande länk, och mönstergill är framställningen av de monokromatiska aberrationerna och influensen av dessa på utformningen av t. ex. linssystem. Fotometri i vid bemärkelse saknas ej.

Hög klass karakteriserar även de avsnitt, där Maxwells teori appliceras på ljusets utbredning i isotropa och anisotropa medier, metallers och dielektriska mediers reflektion och dispersion, det senare utmynnande i Fresnels formler efter komplett härledning. Den fotoelastiska effekten, tillämpad optik eller bättre teknisk optik, har författaren endast snuddat vid, men för detta område finns redan utmärkt litteratur (Fhrocht m. fl.). Ljushastigheten är behandlad fram till det aktuella läget, således beröres även Bergstrands värdefulla arbeten.

Problem saknas helt. En aktiv pedagog skulle naturligtvis ha betraktat det som ett plus, om sådana hade medtagits. Boken är klassisk i sin begränsning av stoffet men högst modern och aktuell i utformningen och av bestående värde för dem som vill tillägna sig optikens elementa i distinkt framställning från Fermat och Huygens fram till aktuella problem. *Eve Staffansson*

Th. Sundorph og H. Jepsen, *Fysik for seminarier*. Elvte udgave ved F. Hjerting, Gyldendal, Köpenhamn, 1957, 346 s., dkr. 27: 50.

H. Jepsen og F. Hjerting, *Fysiske skoleforsøg for seminarier*. Gyldendal, Köpenhamn, 1955, 175 s., dkr. 16: —.

I motsats till de svenska folkskoleseminarierna har de danska en lärobok i fysik speciellt skriven för denna skolform. Ovanstående bok har nu utkommit i helt omarbetat skick. Den är numera uppdelad i två huvudpartier. Den första delen (ca 150 sidor) är avsedd för den s. k. preparandklassen och motsvarar ungefär realskolans kurs. Den andra och större delen omfattar den egentliga seminariekursen och utgör en direkt påbyggnad på den första delen. Genom omarbetningen har boken blivit helt aktuell med exempelvis en enkel och klargörande principbeskrivning av televisionen och något om de fysikaliska lagarna för konstgjorda satelliter. I kapitlet Atomfysik behandlas bl. a. atomreaktorn och jordens energiproblem.

Boken är experimentellt inriktad, och för en svensk lärare har den kanske sitt största värde genom de många trevliga och åskådliga demonstrationsförsöken. En del av dessa har f. ö. redan publicerats i Elementa som notiser av lektor Hjerting (senast i marshäftet 1958).

Av ännu större intresse är boken Fysiske skoleforsøg. Den är avsedd att användas jämsides med ovanstående lärobok men kan också användas helt fristående. Som bokens undertitel »Metodik og øvelsesvejledning» anger, innehåller den en avdelning metodiska anvisningar till såväl demonstrationsförsök som elevlaborationer. Dessa anvisningar upptar visserligen en ganska liten del av boken men torde för många både blivande och färdiga lärare vara av stort värde. Kapitlet avslutas med en samling råd och försiktighetsåtgärder vid vissa fysik- och kemiförsök. Det följande kapitlet omfattar en utmärkt liten handledning i fysikalisk teknik och laboratorieteknik med många praktiska tips av värde för en fysiklärare. Större delen av boken upptages emellertid av ett 70-tal elevlaborationer på fysikens olika områden samt ett antal demonstrationsförsök. Många av laborationerna är enkla och sannolikt välkända för svenska lärare, vilket dock inte hindrar, att en genomgång av det rikhaltiga materialet kan ge impulser till nya försök och laborationer.

Av det ovanstående torde framgå, att boken kan rekommenderas och vara till nytta för åtminstone yngre fysiklärare (oberoende av skolform). *Sven Lennander*

Friedrich Cramer, *Papierchromatographie.* Monographien zur »Angewandte Chemie» und »Chemie-Ingenieur-Technik» Nr. 64. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr., 1958, 215 S., DM 21.00.

Det finns för närvarande en hel del att välja på som hjälpmedel vid laboratoriearbete med papperskromatografi. Den utförligaste sammanställningen har tidigare anmälts i Elementa (*41*, 145, 1958). »Cramer» har särskilt i Europa varit en mycket anlitad mindre handledning och kan även nu i sin fjärde (och i förhållande till den tredje) till omfånget fördubblade upplaga varmt rekommenderas. De olika metoderna, såväl vad beträffar allmän arbetsmetodik som speciell teknik, beskrives på ett så utförligt sätt, att man ej behöver anlita originallitteraturen. Boken kan med fördel även användas på skolstadiet. Många goda tips finns att tillgå i den allmänna delen, som nu också behandlar papperselektrofores. Särskilt utmärkt illustrerade (med färgbilder och schabloner) är metoder för analys av aminosyror. De olika arbetsmomenten presenteras klart och översiktligt och kompletteras med många översiktstabeller (med R_F-värden) och lättbegripliga figurer. *Klas-Bertil Augustinsson*

Rudolf Thiel, *Och det vart ljus.* Albert Bonniers förlag, Stockholm, 1958, 364 s., kr 38:50, inb. 44:50.

Den svenska upplagan av Thiels bok bär underrubriken »Hur astronomerna sökt lösa universums gåtor» i stället för det tyska originalets underrubrik »Roman der Weltallforschung». Den tyska titeln svarar nog bättre mot innehållet. Med hjälp av en mängd ganska roande anekdoter om astronomernas liv och arbetsförhållanden under olika tidevarv ger författaren färg åt skildringen av astronomins utveckling från historiens gryning till våra dagar.

Boken vänder sig till lekmannen och är hållen i mycket populär stil. Betraktar man den som en »roman» kan man med gott samvete rekommendera den som god underhållning av vilken man naturligtvis också kan lära en hel del om astronomin och dess historia. Mycket vackra planscher och ett hundratal figurer i texten förhöjer också värdet.

Men tyvärr måste man konstatera att just beskrivningen av *hur* de astronomiska problemen lösts ofta görs förvirrande och obegriplig, därför att Thiel liksom en del andra populärförfattare lider av vanföreställningen att lekmannen lättare förstår ett problem, om det bara beskrivs ytligt och i svävande ordalag. Den svenske översättaren har visserligen på ett ofta förtjänstfullt sätt förtydligat texten på ett flertal ställen, antingen genom att inskjuta förklarande noter eller genom att helt enkelt hoppa över en del alltför dunkla uttalanden. Men trots detta blir läsaren ofta rätt konfunderad, såsom t. ex. när förf. söker förklara aberrationen (sid. 179). Han skildrar hur Bradley fick sin idé, när han studerade en båtvimpel, och skriver sedan: »Låt vimpeln vara stjärnljuset. Det kommer rusande mot jorden med en hastighet av 30 km/sek. Alltså förskjuts ljusets riktning en liten aning, vi ser stjärnan på ett annat ställe än där den verkligen befinner sig. Under loppet av det årliga kretsloppet vrider sig också stjärnans »ljusvimpel», olika för olika orter på jorden. Detta fenomen kallas aberration.»

Förf:s oförmåga att förklara det väsentliga och hans bristande kontakt med den astronomiska verkligheten demonstreras på många ställen, t. ex. i följande uttalande (sid. 315): »Även utan Polstjärnans hjälp skulle vi ha funnit poler på jordklotet, nämligen två diametralt motsatta avplattningar.»

Det är synd att denna annars så medryckande bok med alla sina kulturhistoriskt intressanta detaljer skall lida av en sådan oklarhet i framställningen av själva de vetenskapliga sammanhangen, som ju ändå för den naturvetenskapligt intresserade måste vara huvudsaken.

Aina Elvius

Erik Storm, *Gjutning.* Sv. Bokförl., Stockholm, 1958, 130 s., kr. 12:—.
H. Hallendorff, *Skärande bearbetning.* Sv. Bokförl., Stockholm, 1958, 316 s., kr. 17:50.

Serien »Läroböcker i verkstadsteknik» (redaktion: Storm, Meuller, Nyberg och Dahlin) är nu komplett så när som på läroboken i verkstadsmätteknik. Enligt anmälarens mening saknas en bok om verkstads- och tillverkningsplanering. Redaktionen har kanhända ansett dessa grenar av ämnet tillhöra ett annat läroämne vid de tekniska läroverken.

Om Storms »Gjutning» kan sägas detsamma som om hans tidigare bok i serien, »Plastisk bearbetning»: bokens omfång och ämnets behandling röjer författarens rika lärarerfarenhet. Ett eller annat tilllämpningsexempel på blandningsberäkning och formningsteknik skulle varit värdefullt.

Hallendorffs »Skärande bearbetning» synes också till omfånget vara väl anpassad till det behov, som boken är avsedd att fylla: en lärobok för de tekniska läroverkens maskintekniska linje. Trots vad författaren anför i förordet anser nog anmälaren, att behandlingen av den skärande bearbetningens teori kunde gått ännu något djupare, och några genomräknade och diskuterade beräkningar skulle ha gjort studiet av ämnet intressantare. Figurmaterialet är gott. Det känns till större delen igen från motsvarande avsnitt av samme författare i »Mekanisk teknologi», som i flera år gjort god tjänst som lärobok vid de tekniska gymnasierna.

Trots den nu snart färdiga serien saknas ännu en del lärobokslitteratur för ämnet verkstadsteknik. Utom det som inledningvis påpekades finns ännu ett obehandlat område, jigg- och fixturteknikens. För den skärande bearbetningens del kunde ett avsnitt om jiggar och fixturer, eventuellt uppdelat på bokens kapitel om fräsning, borrning osv., gärna fått komma med.

Båda de sistkomna böckerna i serien hälsas med tillfredsställelse.

Th. Forsner

A. Frey-Wyssling, *Macromolecules in Cell Structure.* Harvard University Press, Cambridge, 1957, Pp. 112, $ 5.00.

Professorn i växtfysiologi vid Tekniska Högskolan i Zürich visar i denna monografi upp resultat, som vunnits med kemisk analys, röntgenmetoder och elektronmikroskopi inom gränsområdet mellan biokemi och morfologi, t. ex. stärkelsekornets finstruktur och proteinmolekyler i celler. Illustrationerna — teckningar och mikrofotografier — äro utmärkta.

Bertil Englund

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2179) *Från en punkt P drages tangenterna till en hyperbel. De med asymptoterna parallella linjerna genom P skär kurvan i A och B. Visa, att normalerna till PA och PB i A och B råkas på mittpunktsnormalen till tangentkordan.* *V. Thébault*

2180) *En cirkel med centrum O och en punkt A ej belägen på cirkeln eller i O är givna. Finnes en punkt B, för vilken förhållandet $PA^2:PB$. PQ är konstant, när kordan PQ (eventuellt förlängd) vrider sig kring B?* *X.*

2181) *Skriv upp alla primtal så beskaffade, att även alla konsekutiva sifferföljder, som ingår i talet, är primtal, varvid 1 räknas som primtal.* *J. Lundström*

Enklare matematiska uppgifter[2]

2182) I en triangel ABC uppdelas ytan i tre delar av de linjer, som drages från den omskrivna cirkelns medelpunkt till hörnen. Delarnas ytor förhåller sig som sidorna i en annan triangel. Sök dennas vinklar.

Svar: $180°-2A$, $180°-2B$ och $180°-2C$.

2183) I den likbenta triangeln ABC utdrages basen AB över B till D så, att $AB=BD$. En linje l drages genom A parallell med CD. En linje genom C skär l i E och förlängningen av BA i F, så att $EF=AC$. Visa, att sträckorna AB, CE, AF och $2AC$ bildar en geometrisk serie.

Efter Nikomedes, 2:a årh. f. Kr.

Ledning: Använd transversalsatsen och cosinusteoremet på triangeln ACF.

Anm. Ur sin konstruktion fick N. för en liksidig triangel ABC, att $CE=AB\sqrt[3]{2}$; m. a. o. CE är kanten i en kub med dubbelt så stor volym som kuben med kanten AB. Inskjutandet av $EF=AC$ kan i allmänhet ej ske med passare och linjal.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 2182 är insänd av *Ph.*, 2183—2185, 2188—2191 av *X.*, 2186, 2187, 2192 av *S. B.*

2184) Mittpunktsnormalen till hypotenusan i en rätvinklig triangel delar den längre kateten i förhållandet $1:\sqrt{2}$. Beräkna den minsta vinkeln.

Svar: 22,5°.

2185) Visa, att punkterna $(1/a;\ ab+ac)$, $(1/b;\ ac+bc)$ och $(1/c;\ ab+bc)$ ligger på en rät linje och beräkna linjens y-intercept.

Svar: $ab+ac+bc$.

2186) Räta linjen $y=x$ skär kurvan $6y=7x^2-x^4$ i origo O samt i 1:a kvadranten från origo räknat i A och B. Sök förhållandet mellan ytorna av de mot kordorna OA och AB svarande segmenten.

Svar: 13:17.

2187) Visa att de tangenter som drages till kurvan $y=(x-a)^2+0{,}25$ från en punkt på x-axeln bildar 90° med varandra.

2188) En parabel $y=ax^2+bx+c$ går genom punkterna $(-3;\ 1)$ och $(3;\ 7)$. Tangenterna i dessa punkter råkas i en punkt med ordinatan -5. Sök kurvans minimipunkt.

Svar: $(-1;\ -1)$.

2189) Om parablerna $y=ax^2+bx+c$ och $y=cx^2+bx+a$ har två gemensamma tangenter, i vilken punkt råkas dessa? Sök villkoret för att två gemensamma tangenter skall finnas.

Svar: I origo; $ac>0$.

2190) Vilken kurva tangerar varje linje, på vilken parablerna $2y-x^2=0$ och $3y+x^2=0$ avskär lika kordor?

Svar: $x^2+y=0$.

2191) En linje genom origo O skär kurvan $y(x^2+px+q)=x$ dessutom i punkterna A och B. Det förutsättes, att $pq\neq 0$ och $p^2\neq 4q$. Sök orten a) för mittpunkten av AB, b) för den punkt P, som jämte O delar sträckan AB harmoniskt.

Svar: a) Om Q är kontaktpunkten för tangenten från origo, är för $p^2<4q$ orten den mellan Q och x-axeln belägna delen av linjen $2x+p=0$. Är $p^2>4q$, skall nämnda del av linjen uteslutas. b) Delar av hyperbeln $pxy+2qy-2x=0$, som tangerar kurvan i origo och går genom Q.

2192) Kateterna AB och AC i en rätvinklig triangel är 6 cm resp. 8 cm. En rörlig med AC parallell transversal skär AB i D och BC i E. Undersök, hur ytan av fyrhörningen $ADEM$ varierar, då M är mittpunkten av AC.

Svar: Ytan växer från 12 cm² till 13,5 cm² (för $DE=2$ cm) och avtar sedan till 0.

Lösningar till uppg. 2155—2157

2155) *Beräkna* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}\,(2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$. *X.*

Ersätt x med $1/x$ och använd approximationen $\sqrt{1\pm x}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, så fås efter förenkling $\lim_{x\to0} \sqrt{1-x}(2-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}):x(1-\sqrt{1-x})=\lim_{x\to0} \frac{1}{4}\sqrt{1-x}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x)=\frac{1}{2}$. *R. Li.*

Även löst av *P.-O. Orrhede, E. Samén, H. Simonsson, Sb, A. T.*

2156) *Två räta linjer a och b råkas i O. Normalerna från punkten P mot a och b skär resp. b i B och a i A. Sök orten för P, då fyrhörningen $OAPB(O)$ bibehåller samma yta.* *X.*

I. P är ortocentrum i triangeln ABO. Sätt $OP=a$ och vinkeln $AOB=\alpha$. Då är enligt en känd sats $OP=2R\cos\alpha$, varav $AB=a\operatorname{tg}\alpha$. Fyrhörningens yta är $\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$, varför OP är konstant och orten en cirkel med O som centrum. *S. B.*

II. Ortens tangent i P är parallell med AB, dvs. vinkelrät mot OP, varför orten är en cirkel. Är nämligen P' en angränsande punkt med tillhörande A', B', har trapetsen $PAA'P'$ och $PBB'P'$ samma yta, varav följer, att om $P'\to P$ förhållandet mellan trianglarna PAP' och PBP' går mot 1, dvs. påståendet. Detta är ett specialfall av en sats av Apollonios: Om PA och PB har var sin fixa riktning u, v, är under samma förutsättning orten ett kägelsnitt med centrum i O, i vilket diametrarna med riktningarna u, v är konjugerade med a resp. b. Tangenten i P är parallell med AB. *X.*

Även löst av *R. Li, H. Simonsson, A. T., Sb.*

2157) *I varje triangel ABC är* $\{p^4+(p-a)^4+(p-b)^4+(p-c)^4-a^4-b^4-c^4\}:T^2$ *ett och samma hela tal.* *V. Thébault*

Ersättes $p-a$, $p-b$, $p-c$, p med resp. $x, y, z, x+y+z$, övergår täljaren i ett homogent polynom av 4:e graden. Betraktas x, y, z som oberoende variabler, sönderfaller detta i $kxyz(x+y+z)$, där k är en sifferfaktor, ty det försvinner med $x, y, z, x+y+z$ var för sig. För t. ex. $x=y=z=1$ erhålles $k=12$. Återgång till en triangel ger satsen. *X.*

Även löst av *A. V., A. T., E. Samén, H. Simonsson, U. Sjögren, Sb, R. Li.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

November 1958

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Bevisa formeln $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, där n är ett positivt heltal.
2. Bestäm konstanterna a, b och c så, att kurvan $y=ax^2+bx+c$ går genom punkterna A (1; 0) och B (3; 12) och att kurvans tangent i B går genom origo O. Beräkna därefter ytan av det område, som begränsas av kurvbågen AB och de räta linjerna AO och BO.
3. En sfär är inskriven i en rät cirkulär kon. Bevisa, att förhållandet mellan sfärens och konens volymer är lika med förhållandet mellan deras ytor.
4. En ellips och en hyperbel är så belägna, att vardera kurvans vertices är brännpunkter till den andra kurvan. Hyperbelns parameter är dubbelt så stor som ellipsens. Bestäm kurvornas excentriciteter.
5. Genom sambandet $\sin y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, där $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, bestämmes y som en deriverbar funktion av x. Härled för $\frac{dy}{dx}$ och $\frac{d^2y}{dx^2}$ uttryck, som endast innehåller variabeln x. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar den mot funktionen svarande kurvan i dess huvuddrag.
6. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten (0; 1) i ett rätvinkligt koordinatsystem, och hörnet B genomlöper kurvan $x^2-4y=0$. Sidan BC är parallell med y-axeln och lika stor som sidan AB. Bestäm geometriska orten för tyngdpunkten i triangeln ABC, när hörnet B beskriver den angivna kurvan. Upprita orten i dess huvuddrag.
7. En cirkelsektor med medelpunktsvinkeln $2v$, där $v<90°$, roterar kring en diameter i den cirkel, varav sektorn utgör en del. Nämnda diameter råkar inte sektorns båge. Den yta, som vid rotationen alstras av cirkelbågen, är S, och summan av de övriga alstrade ytorna är A. Det finns ett samband mellan de tre storheterna S, A och v. Bestäm detta.
8. Funktionen $y=F_0(x)=x-\sin x$, där x mätes i radianer, är >0 för $x>0$. En följd av funktioner, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ..., kan bestämmas så, att de uppfyller villkoren $\frac{dF_k(x)}{dx}=F_{k-1}(x)$ och $F_k(0)=0$ för

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

$k=1, 2, 3, \ldots$. Visa först, att $F_k(x)>0$ för $x>0$. Bestäm därefter så många funktioner i följden, att med hjälp av deras ovan angivna egenskaper följande olikheter skall kunna visas för $x>0$:

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \text{ och } 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

Resultat: **2.** $a=-1$, $b=10$, $c=-9$; ytan $4\frac{2}{3}$ ytenh. **4.** $\frac{1}{2}$ resp. 2. **5.** $y'=1:(1+x^2)$ och $y''=-2x:(1+x^2)^2$. Sambandet kan skrivas $x=\operatorname{tg} y$, då kurvan fås direkt. **6.** Parablerna $x^2=\frac{16}{3}y$ och $x^2=\frac{16}{9}(y-\frac{2}{3})$. — För varje läge av B finns två punkter C, av vilka den ena ligger på den givna parabelns styrlinje. **7.** $S=2A\operatorname{tg} v$. **8.** Av $f(0)=0$, $f'(x)\geqq 0$ för $x\geqq 0$ (varvid $f'(x)=0$ endast i enstaka punkter) följer $f(x)>0$ för $x>0$. Tillämpas på F_0, $F_1=\frac{x^2}{2!}-1+\cos x$, $F_2=\frac{x^3}{3!}-x+\sin x$, $F_3=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2!}+$ $+1-\cos x$, $F_4=\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$.

Reallinjens biologiska gren

1. Bestäm förhållandet mellan den buktiga och den plana begränsningsytan i en rät cirkulär kon med konstant sida, så att skillnaden mellan de nämnda ytorna blir så stor som möjligt.
2. Två konvergenta oändliga geometriska serier har samma första term. Den ena seriens kvot är lika med inverterade värdet av första termen. Den andra seriens kvot är dubbelt så stor som den förra seriens, och dess summa är två enheter större än den förra seriens summa. Bestäm den sist nämnda summan i exakt och så enkel form som möjligt.
3. Radioaktiva ämnen sönderfaller som bekant på så sätt, att av en viss mängd m av ämnet återstår efter tiden t en mängd $me^{-\lambda t}$, där λ är en positiv konstant. För ett visst sådant ämne har man funnit, att 10 % återstår efter 50 dygn. Hur länge dröjer det ytterligare, innan endast 5 % återstår av den ursprungliga mängden m?
4. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Vinkeln B är 3 gånger så stor som vinkeln A, och diagonalerna AC och BD förhåller sig som 3 : 4. Bestäm fyrhörningens vinklar.
5. En hel rationell funktion $y=f(x)$ av tredje graden har nollställena $x=-2$, $x=0$ och $x=2$. Den motsvarande funktionskurvan och x-axeln innesluter en del av koordinatplanet i första kvadranten med ytan 8 ytenheter. Bestäm $f(x)$, och upprita funktionskurvan.
6. Bestäm konstanterna a, b och c så, att funktionen $y=ax^2+bx+c$ för alla värden på x satisfierar ekvationen $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+5y=10x^2-3x$. Med $\frac{d^2y}{dx^2}$ menas derivatan av $\frac{dy}{dx}$ med avseende på x.

7. På kurvan $y=x^2$ väljes två punkter A och B så, att triangeln AOB blir rätvinklig i origo O. Sidorna AO och BO utdrages över O, och deras skärningspunkter med den räta linjen $y=-1$ betecknas med P respektive Q. Bevisa, att trianglarna AOB och POQ har lika stora ytor.
8. I en pyramid $ABCDE$ är basytan en kvadrat $ABCD$ med ytan 18 ytenheter. Sidokanten AE är vinkelrät mot basytan och har längden 12 längdenheter. Genom en punkt P på diagonalen AC i basytan lägges ett plan vinkelrätt mot AC. Mätetalet för snittytan är en funktion $f(x)$ av mätetalet x för sträckan AP. Ange denna funktion, undersök densamma och åskådliggör den grafiskt. Särskild uppmärksamhet skall ägnas funktionens definitionsområde.

Resultat: **1.** 2. **2.** $2+\sqrt{20}$. **3.** 15 dygn. **4.** $A=48{,}59°$; $B=145{,}77°$; $C=131{,}41°$; $D=34{,}23°$. **5.** $f(x)=8x-2x^3$, max. i $(\frac{2}{3}\sqrt{3};\ \frac{32}{9}\sqrt{3})$, min. i $(-\frac{2}{3}\sqrt{3};-\frac{32}{9}\sqrt{3})$. **6.** $a=2$, $b=-3$, $c=1$. **8.** $f(x)=6\,(4x-x^2)$ för $0<x\leqq 3$ med max.=24 för $x=2$; $f(x)=2(6-x)^2$ för $3\leqq x<6$. Motsvarande parabelbågar har gemensam tangent i (3; 18).

Allmänna linjens sociala gren

1. I triangeln ABC är sidan AB 18 cm, sidan BC 8 cm och sidan AC dubbelt så stor som den mot AB dragna medianen. Beräkna vinkeln B.
5. En person har erhållit en livränta på 1200 kr, vilket belopp skall utbetalas till honom vid början av vart och ett av 25 på varandra följande år. Han önskar nu i stället uppbära 3500 kr vid första årets början och ett visst belopp vid början av vart och ett av de närmast följande 15 åren. Hur stort blir detta belopp, om ränta beräknas efter $4\frac{1}{2}$ %?

Uppg. 2—4 och 6—8 se biol. gren 1—3 och 5—7.

Resultat: **1.** 48,19°. **5.** 1406 kr.

Matematiska uppgifter för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases}(x+1)^2-y^2=144\\(x+3)^2-(14-y)^2=144\end{cases}$
2. Se social gren 1.
3. I den rätvinkliga triangeln ABC är kateterna AB 24 cm och AC 10 cm. En cirkel med radien 6 cm har sin medelpunkt i mittpunkten O på AB och skär sidan BC i punkterna D och E. Beräkna vinkeln DOE.
4. I en geometrisk serie med fem termer är andra termen 1. Seriens summa förhåller sig till summan av den serie, som bildas av ter-

mernas inverterade värden, som 4 : 9. Vilken är den ursprungliga serien?

5. Se social gren 5.
6. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel med radien 2 cm. Cirkelns tangent i punkten C bildar med sidan CB en vinkel av 30°. Summan av sidorna AC och BC är 5,2 cm. Beräkna ytan av triangeln ABC.
7. I den rätvinkliga triangeln ABC är CD höjden mot hypotenusan. De i trianglarna ACD och BCD inskrivna cirklarna har medelpunkterna O' respektive O''. Förlängningarna av sträckorna $O'O''$ och AB bildar med varandra en vinkel av 15°. Beräkna de spetsiga vinklarna i triangeln ABC.
8. I triangeln ABC är sidorna AB 21 cm, BC 17 cm och AC 10 cm. P är en punkt på AB, belägen x cm från punkten A. En transversal genom P, dragen vinkelrätt mot AB, delar triangeln ABC i två delar; AP är sida i den ena delen. Undersök, hur ytan y cm² av denna del varierar, när P rör sig från A till B, och åskådliggör detta grafiskt.

Resultat: **1.** $x_1=12$, $y_1=5$; $x_2=-16$, $y_2=9$. **3.** 79,43°. **4.** $1\frac{1}{2}, 1, \ldots$ eller $-1\frac{1}{2}, 1, \ldots$. **6.** 0,32 $(\sqrt{48}\pm 3)$ cm³, dvs. 3,18 eller 1,26 cm². **7.** De spetsiga vinklarna är $45°\pm 15°$, dvs. 60° och 30°. — $\triangle O'O''D \sim \triangle ABC$. Ty av att $\triangle CDO' \sim \triangle BDO''$ följer $DO' : DO'' = DC : DB$ osv. **8.** I. $0 < x \leqq 6$, $y=\frac{2}{3}x^2$. II. $6 \leqq x < 21$, $y=84-\frac{4}{15}(21-x)^2$. De båda parabelbågarna I och II möts med gemensam tangent i (6; 24); y växer från 0 till 84, då x går från 0 till 21.

Realgymnasiet. Allmän kurs

3. En hel rationell funktion $y=f(x)$ av tredje graden har nollställena $x=-2$, $x=0$ och $x=2$, och den mot funktionen svarande kurvan har en maximipunkt på den räta linjen $y=2x$. Bestäm $f(x)$ och upprita kurvan.
5. I en rät cirkulär kon inskrives en sfär, och kring sfären omskrives en rät cirkulär cylinder. Volymerna av sfären, cylindern och konen bildar en aritmetisk serie. Bestäm konens toppvinkel.

Uppg. 1, 2, 4, 6 och 7 se biol. gren 2, 4, 7, 6, 8; uppg. 8 se matem. gren 7.

Resultat: **3.** $y=\frac{3}{4}(4x-x^3)$. Kurvan har centrum i origo och maximipunkten i $(\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{9}\sqrt{3})$. **5.** 38,94°.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. De båda ellipserna $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ och $b^2x^2+a^2y^2=2a^2by$ skär varandra under räta vinklar. Bestäm vardera ellipsens excentricitet.
2. En cirkel har sin medelpunkt på axeln till parabeln $y^2=2px$, tan-

gerar parabeln i två punkter och går genom dess brännpunkt. Bestäm cirkelns ekvation.

3. Från punkten $(0; 3b)$ drages en tangent till hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Avståndet från hyperbelns medelpunkt till den nämnda tangenten är medelproportional till hyperbelns halvaxlar. Beräkna vinkeln mellan asymptoterna.
4. En cirkel med variabel radie går genom origo i ett rätvinkligt koordinatsystem och tangerar den fixa räta linjen $x=a$. Genom tangeringspunkten drages diametern i cirkeln. Sök och upprita geometriska orten för diameterns andra ändpunkt.
5. En rektangels hörn ligger på omkretsen av en given cirkelsektor, vars radie är r och vars medelpunktsvinkel är mindre än 180°. Två av rektangelns sidor är parallella med bisektrisen till sektorns medelpunktsvinkel. Hur stor är denna, om rektangelns största yta är $\frac{1}{6}r^2$?
6. Bestäm konstanterna a och b så, att kurvan $y^2=1-\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$ får en maximipunkt och en minimipunkt på den räta linjen $6x=55$ samt två inflexionspunkter på den räta linjen $x=11$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man uppritar kurvan i dess huvuddrag.
7. Kurvan $y=\frac{x^n-a}{x}$, där n är ett positivt heltal och a en konstant $\neq 0$, har en inflexionspunkt på x-axeln. Bestäm värdet på n. Undersök därefter för detta n-värde förekomsten av maximi- och minimipunkter, och bestäm orten för dessa punkter när a antar olika värden.

Resultat: **1.** $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. **2.** $(x-2{,}5p)^2+y^2=4p^2$. **3.** $14{,}80°$ eller $75{,}20°$. **4.** Parabeln $y^2=-ax$. — Sammanbind diameterns ändpunkter med origo och tillämpa planimetrisk sats. **5.** $37{,}85°$. — Ytans max. är $r^2 \cdot \operatorname{tg} v$, där medelpunktsvinkeln är $4v$. Se anvisningen till spec. mat., mars 1953, uppg. 6, Elementa *36* (1953), s. 139. **6.** $a=18$, $b=82{,}5$. Kurvan är symmetrisk med avseende på x-axeln, med en gren i varje kvadrant. Asymptoter är $x=0$ och $y=\pm 1$, av vilka de senare skär kurvan i $(\frac{55}{12}; \pm 1)$. **7.** Man finner $n=3$, varför kurvan är $y=x^2-a/x$; den består av två grenar med gemensam asymptot, $x=0$. Den ena grenen har min. i $(-\sqrt[3]{0{,}5a}; \sqrt[3]{0{,}25a^2})$; infl. p. ligger på den andra grenen. Orten för min.p. är parabeln $y=3x^2$, toppen dock undantagen.

Uppgifter i fysik

1. En varuhiss med last väger 2000 kg. Den lyftes med en stålkabel, som ej får utsättas för större dragkraft än $2{,}5 \cdot 10^4$ newton. Hur stor får alltså accelerationen vid rörelsen uppåt högst vara?

2. En bil väger 1 ton (med förare). Den kortaste tid, på vilken bilen på horisontell väg kan öka hastigheten från 60 till 90 km/tim, är 6 sek. Beräkna, uttryckt i hk, den del av motorns avgivna effekt, som åtgått för ökningen av bilens rörelseenergi.
3. En kula befinner sig 2,0 m lodrätt över periferin på en horisontell, cirkulär skiva. Skivan sättes i rotation kring en vertikal axel genom medelpunkten med konstant hastighet. I det ögonblick, då kulan befinner sig mitt över en punkt *B* på skivans periferi, får den falla fritt utan begynnelsehastighet och träffar därvid skivan i punkten *B*. Vilket är det lägsta varvtal hos skivan, för vilket detta inträffar?
4. En kropp, som ligger på ett strävt, lutande plan, hindras nätt och jämnt av en viss kraft att glida utför planet, vare sig denna kraft verkar i horisontell riktning eller parallellt med planet. Beräkna friktionskoefficienten mellan kroppen och planet, om planet lutar 40° mot horisontalplanet. Figurer, återgivande kraftsituationen i de båda fallen, erfordras. Kroppen får betraktas som liten.
5. Mot en tunn samlingslins med brännvidden 30 cm infaller ett knippe med linsens huvudaxel parallella ljusstrålar. Bakom linsen är placerad en plan spegel med den speglande ytan vänd mot linsen och vinkelrät mot huvudaxeln. Hur stort skall avståndet mellan linsen och spegeln vara, om det ursprungliga knippet efter brytning i linsen, reflexion i spegeln och återigen brytning i linsen skall konvergera mot en punkt på huvudaxeln, belägen 10 cm framför linsen? Figur med strålgång erfordras.
6. Genom två kopparkablar med 102 mm² genomskärningsyta överföres från en kraftstation elektrisk energi till en plats, som ligger på 150 km avstånd. Vid kraftstationen, som ger likström, är spänningen 100 000 V. Hur stor är spänningen vid mottagningsstationen, då den mottagna effekten är 10 000 kW? Koppars resistivitet är 0,017 ohm • mm²/m.
7. Eftersom resistansen i en glödlampas lystråd till sin storlek bl. a. beror av dennas temperatur, kommer sambandet mellan spänning *U* över och ström *I* genom tråden ej att vara lineärt. För en viss lampa (wolframtråd) fann man experimentellt följande värden:

U	8	46	98	154	220	volt
I	0,07	0,12	0,17	0,22	0,26	ampere

Bestäm grafiskt spänningen över lampan, om den anslutes till 220 V i serie med ett motstånd på 1000 ohm.

8. För demonstration av induktionsströmmar har man en sluten strömbana, bestående av en 1,00 m lång koppartråd, som är böjd i form av en kvadrat. Trådens genomskärningsyta är 50 mm². Vidare har

man en elektromagnet med plana, parallella polskor, som sitter ganska nära varandra, varför magnetfältet mellan dem kan anses vara homogent. Elektromagneten är uppställd så, att fältet har vertikal riktning. Fältstyrkan är 0,1 weber/m². Den kvadratiska strömbanan, vars plan är horisontellt, flyttas i detta plan med konstant hastighet, så att kvadratens ena sida föres in i magnetfältet. Rörelseriktningen är vinkelrät mot denna sida. Hur stor kraft erfordras för att upprätthålla en hastighet av 1,00 m/sek, när 5,0 cm av ledaren befinner sig inom fältet? En rak ledare med längden l m, som genomflytes av en ström med styrkan I ampere och som befinner sig i ett homogent magnetfält med fältstyrkan B weber/m², påverkas av en kraft, vars storlek är $B \cdot I \cdot l$ newton, under förutsättning att ledaren är vinkelrät mot magnetfältet. Koppars resistivitet är 0,017 ohm · mm²/m. Figur, i vilken riktningarna av magnetfältet, induktionsströmmen och rörelsen tydligt markerats, erfordras. Elektromagneten behöver inte ritas ut.

Resultat: **1.** 2,7 m/sek². **2.** 39 hk. **3.** 94 varv/min. **4.** 0,36 (=tg 20°). **5.** 7,5 cm. **6.** 94 700 V. **7.** 74 V. **8.** 0,074 newton.

Realexamen och praktisk realexamen h. t. 1958

I. Provräkning i realexamen

1. Lös ekvationen $\dfrac{3-3x}{x-\dfrac{1}{11}}=4{,}5$.
2. En pojke köpte en rektangulär plywoodskiva i formatet 70 cm×140 cm och betalade för den 9 kr. Hur många procents prissänkning erhöll han, om priset var 9,50 kr/m²?
3. En person köpte den 30 april 12 st 4 % obligationer å nominellt 250 kr vardera och med ränteterminerna den 15 januari och 15 juli. Han betalade för obligationerna 3200 kr, inberäknat upplupen ränta. Till vilken kurs köpte han obligationerna?
4. En triangel ABC har sidan BC=5 cm. Vinklarna A, B och C förhåller sig som 5 : 4 : 3. Konstruera med hjälp av passare och linjal triangeln ABC.
5. En person räknar med följande årliga omkostnader för sin bil:
   a) 6 % ränta på det i bilen placerade kapitalet, 13 000 kr;
   b) skatt, försäkringspremier, garagehyra och underhållskostnader, tillhopa 1500 kr;
   c) värdeminskning 12 kr per 100 km körd sträcka;
   d) bensin- och oljekostnader 9 kr per 100 km körd sträcka.

Hur många kilometer måste han färdas under ett år, för att varje kilometer skall kosta honom 40 öre?

6. Man vill bestämma avståndet från en plats A på södra stranden av Riddarfjärden i Stockholm till krönet B av stadshustornet på motsatta stranden. Höjdskillnaden mellan A och B är 100 m. På en karta över Stockholm i skalan 1 : 12 000 är avståndet 55 mm mellan A och en punkt C, belägen lodrätt under B och i samma horisontalplan som A. Beräkna avståndet AB.
7. En behållare med volymen 528 cm³ har formen av en regelbunden pyramid, vars basyta är en kvadrat med 12 cm sida. Pyramiden är placerad så, att dess spets befinner sig lodrätt under basytans mittpunkt. Behållaren är till halva sin höjd fylld med blyhagel. Varje hagel har en diameter av 2 mm. Mellanrummen mellan haglen antas utgöra 40 % av haglens volym. Beräkna antalet hagel. Som närmevärde på π användes $3\frac{1}{7}$.
8. I triangeln ABC är AB 40 cm, AC 56 cm och BC 24 cm. På AB ligger en punkt D och på AC en punkt E så, att en cirkel kan läggas genom punkterna B, D, E och C och så, att summan av sträckorna DA och AE är lika stor som summan av sträckorna DB, BC och CE. Beräkna avståndet AD.

Resultat: **1.** $x=\frac{5}{11}$. **2.** 3,3 %. **3.** 105,5 %. **5.** 12 000 km. **6.** 667,5 m. **7.** 11 250 st. **8.** 35 cm.

II. Provräkning i realexamen, avkortad kurs

1. En växel på 900 kr, som förfaller den 29 november, diskonteras den 4 september efter 6 %. Beräkna dess diskonterade värde.
2. Undervattensbåten Nautilus tillryggalade sin 2950 km långa färd under polarisen på 96 timmar. Vilken var dess medelhastighet i knop? 1 knop=1 nautisk mil/tim. 1 nautisk mil≈1,85 km.
3. Se Uppg. 2 i provräkning I.
4. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+1{,}5y=7 \\ 5x-\frac{y}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$
5. För framställning av betong användes en blandning av cement, sand och grus. Volymerna av cement och sand förhåller sig som 2 : 5 och volymerna av sand och grus som 3 : 7. Hur mycket cement, sand och grus ingår i 60 m³ av denna blandning?

6 och 7. Se Uppg. 3 och 5 i provräkning I.

8. Under en tid, då sparbankernas inlåningsränta var 4 %, dvs. insättarna erhöll 4 % ränta på sina på sparkasseräkning placerade medel, var den årliga utdelningen på ett visst slags aktier 18 kr per aktie. Detta innebar, att en person, som ägde sådana aktier, fick

4,5 % ränta på sitt i aktierna placerade kapital. Bankerna höjde sedan sin inlåningsränta 1 %. Med vilket belopp skulle kursvärdet per aktie sjunka, för att den, som köper sådana värdepapper, skall få lika stor ränta på sina pengar, som han skulle ha fått, om pengarna hade placerats på sparkasseräkning? Utdelningen på aktierna antas vara oförändrad.

Resultat: 1. 887,25 kr. 2. 16,6 knop. 4. $x=\frac{1}{3}$, $y=4$. 5. 6,4 m³ cement; 16,1 m³ sand; 37,5 m³ grus. 8. 40 kr.

III. För huslig linje förekom ej något prov; inga anmälningar till examen på denna linje förelåg. — Av utrymmesskäl har uppg. för handelslinjen ej kunnat medtagas.

IV. Provräkning för maskinteknisk linje

1. Uppg. 5 i provräkning I men med annan fråga:
   Han färdas under ett år 1 200 mil. Vad har det i genomsnitt kostat honom per km?
2. Uppg. 6 i provräkning I.
3. Ytan av en cirkel med radien r är approximativt lika stor som ytan av en kvadrat med diagonalen $\frac{5}{2}r$. Hur många procent av värdet på cirkelns yta utgör felet?
4. Två små homogena, sfäriska kulor, den ena av stål (täthet: 7,83 g/cm³), den andra av bly (täthet: 11,34 g/cm³), vägs på en känslig våg. Stålkulan väger 1,507 g, blykulan 1,937 g. Sök skillnaden mellan kulornas radier.
5. Två cirkelsektorer har samma omkrets, 14 cm, och samma yta, 12 cm². Bestäm förhållandet mellan deras medelpunktsvinklar.
6. I en regelbunden fyrsidig pyramid är baskanten 1 m. Kvadraten på höjden mot basytan är lika stor som summan av de fyra sidoytorna. Beräkna pyramidens volym.
7. I ett klot är en kub inskriven. Bestäm förhållandet mellan kubens kant och klotets radie.
8. Ett oändligt antal räta, cirkulära cylindrar har vardera volymen 1 dm³. Totala ytan av en sådan cylinder är y dm² och basytans radie x cm. Uttryck y som funktion av x. Beräkna värdet av y för x-värdena 3, 4, 5, 6, 7, 8. Åskådliggör funktionen grafiskt och ange med ledning av diagrammet ett approximativt värde på radien, då y har sitt minsta värde.

Resultat: 1. 40 öre. 3. 0,53 %. 4. 0,14 mm. 5. 9 : 16. 6. $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (=0,686) m³. 7. $2:\sqrt{3}$. 8. $y=\frac{1}{50}\pi x^2+20/x$; y-värden: 7,23; 6,00; 5,57; 5,59; 5,94; 6,52. Min. för $x=5{,}5$.

Fyrtioförsta årgångens innehåll
1958

Algéus, S. Anm. av Schramm, Chemische und biologische Laboratorien 72

Alväger, T. Anm. av Duckworth, Mass Spectroscopy 222

Andersson, J. Om $u+v+w=0$ och $|u| \pm |v| \pm |w|=0$ 32

— Standardekvationerna för ellips och hyperbel 101

— Periodiska kurvor med symmetriegenskaper 178

Andersson, S. Föreningen i Lund för matem. naturv. underv., möte i nov. 1957 54

Anvill, S. och Carlberg, P. Moderna magnetiska material 169, 261

Arfwedson, G. Formeln $E=m\,c^2$ 35

Asplund, E. Anm. av Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (57), Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'éspace Hilbertien (132).

Augustinsson, K.-B. Anm. av Fruton/Simmonds, General Biochemistry (229), Cramer, Papierchromatographie (298).

Bergström, I. Spegelsymmetri i fysiken. Nobelpriset i fysik 1957 1

Berndt, S. Luftmotståndet vid flygning 183, 249

Björling, G. Anm. av Rostoker, The Metallurgy of Vanadium 226

Blom, G. Anm. av Fraser, Nonparametric Methods in Statistics (59), Grenander/Rosenblatt, Statistical Analysis of Stationary Time Series (60), Bartlett, An Introduction to Stochastic Processes (60), Cochran/Cox, Experimental Designs (61), Applied Probability (62), Hyrenius, Statistiska metoder (213), Hogben, Statistical Theory (214).

— Anm. av Churchman/Ackoff/Arnoff, Introduction to Operations Research; Operations Research for Management; Operationsanalysen och företagsledningen; A Comprehensive Bibliography on Operations Research; Luce/Raiffa, Games and Decisions; Vazsonyi, Scientific Programming in Business and Industry; Morse, Queues, Inventories and Maintenance; Pollaczek, Problèmes stochastiques; Peck/Hazelwood, Finite Queuing Tables 289

Blomqvist, J. Anm. av Hartree, The Calculation of Atomic Structures 218
Calais, J.-L. och Löwdin, P. O. Anm. av Daudel, Les fondements de la chimie théorique 220
Carlberg, P. och Anvill, S. Moderna magnetiska material 169, 261
Dahlgren, Fr. Anm. av Fröberg, Complete Elliptic Integrals 133
Dahlin, E. Anm. av Mabie/Ocvirk, Mechanisms and Dynamics of Machinery 147
Ehrnst, Fr. Anm. av Hultman, Livförsäkringsteknik 131
Elvius, Aina. Anm. av Thiel, Och det vart ljus 299
Englund, B. Kemiska skolexperiment 47
— Formler, symboler och modeller i elementär kemiundervisning 271
Anm. av Boström, Fotografisk kemi (75), The Physics and Chemistry of Life (142), Robertsson, Modern Chemistry for the Engineer and Scientist (146), Lövgren, Atomernas historia (232), Kiessling, Atomreaktorer och deras materialproblem (234), Wells, The Third Dimension in Chemistry (235), Frey-Wyssling, Macromolecules in Cell Structure (300).
Ericsson, G. och Nilsson, N. B. Apparat för demonstration av vissa cirkelsatser 52
Eriksson, K. Framställning av klordioxid för blekning av pappersmassa 123
Faxén, H. Anm. av Cowling, Magnetohydrodynamics 217
Forsling, W. Anm. av Lederer, Chromatography 145
Forsner, Th. Anm. av Aversten, Svetsning (148), Storm, Gjutning (300), Hallendorff, Skärande bearbetning (300).
von Friesen, S. Anm. av Hooper/Scharff, The Cosmic Radiation 223
Fröberg, C.-E. Anm. av Willers, Methoden der praktischen Analysis (134), Kunz, Numerical Analysis (212).
Fröman, A. Anm. av Series, The Spectrum of Atomic Hydrogen 224
Grundström, B. Heisenbergs osäkerhetsrelation i gymnasieundervisningen 105
— Anm. av Höfling, Lehrbuch der Physik (69), Bohr, Atomfysik og menneskelig Erkendelse (139), Friedrich/Langeheine, Atomphysik im Unterricht (140) Friedrich/Langeheine/Ulbricht, Versuche zur Atomphysik (140), Höfling, Physikaufgaben (228), Bohr, Atomteori og naturbeskrivelse (292), Bohr, Atomic Physics and Human Knowledge (292).
Hansson, H.-G. Reflexioner kring ett examensprov i kemi 125
Hansson, N. Anm. av Lyttleton, The Modern Universe 68
Hedelius, A. Modeller för kemiundervisningen 121
Hemer, O. Anm. av Lietzmann, Sonderlinge im Bereich der Zahlen 58
Hjerting, F. Forskellige trykforsøg 49
Hult, J. Anm. av Parker, Brittle Behavior of Engineering Structures ... 71
Häggmark, P. Anm. av Kemeny/Snell/Thompson, Introduction to

Finite Mathematics (132), Hemmerling, College Plane Geometry (287).

Ingelstam, E. Anm. av van de Hulst, Light Scattering by Small Particles 65

Ingri, N. Anm. av Charlot, L'analyse qualitative et les réactions en solution 144

Johansson, A. Anm. av Fritz/Hammond, Quantitative Organic Analysis 233

Jonsson, C. V. Anm. av Fischer, Five Mathematical Structure Models in Natural Philosophy with Technical Physical Quaternions (61), Kahra, Die spezielle Relativitätstheorie (136).

Jönsson, T. Anm. av Shamos/Murphy, Recent Advances in Science: Physics and Applied Mathematics (62), The First One Hundred and Fifty Years. A History of John Wiley and Sons Incorporated, 1807—1957 (63), Reports on Progress in Physics, Vol. XX (226), Year Book of the Physical Society 1957 (226), Wolf, Erdsatellit und Weltraumfahrt (227), Svensk Naturvetenskap: Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok, årg. X och XI (293), Siegbahn/Nilsson, Kärn- och elektronspinresonans (293).

Kjellberg, B. Anm. av Buck, Advanced Calculus 210

Lehto, O. Anm. av King-Laï-Hiong, Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algèbroïdes 211

Lennander, S. Anm. av Sundorph/Jepsen/Hjerting, Fysik for seminarier (297), Jepsen/Hjerting, Fysiske skoleforsøg for seminarier (297).

Lidén, K. Nyare metoder för de radioaktiva isotopernas användning 17

Liljeqvist, B. Kvicksilverspektrum 203

Linde, J. O. Anm. av Goldman, The Science of Engineering Materials ... 225

Lindqvist, T. Atomfysik i Israel 37

Lindskog, F. Referat från kurs i fysik 5—15 aug. 1958 208

Lindstad, O. Egenskaper ved kjeglesnitts-tangenten 281

Ljunghall, A. Anm. av Frauenfelder/Huber, Einführung in die Physik, Band 2 246

Lundqvist, D. Anm. av Gibson/Aigrain/Burgess, Progress in Semiconductors, Vol. I, II 224

Lundström, J. Om magiska rektanglar 198

Lunell, E. Anm. av Alger, Mathematics for Science and Engineering ... 284

Lönnqvist, C. Tangentteoremet 283

Löwdin, P. O. och Calais, J.-L. Anm. av Daudel, Les fondements de la chimie théorique 220

Markesjö, G. Anm. av Paskell, Semiconductor Abstracts Vol. III 142

Mathisson, S. Anm. av Schröder, Kortvågshandboken 228

Melander, L. Anm. av Walling, Free Radicals in Solution 74

Myrbäck, K. Nucleinämnenas kemi. Nobelpriset i kemi 1957 89

Nilsson, N. B. och Ericsson, G. Apparat för demonstration av vissa cirkelsatser 52
Nilsson, S. B. Anm. av Synge, The Hypercircle in Mathematical Physics (215), Easthope, Three Dimensional Dynamics (216), Atkin, Mathematics and Wave Mechanics (286).
Nordling, C., Anm. av Dekker, Solid State Physics 67
Nylinder, S. Anm. av Stepanoff, Centrifugal and Axial Flow Pumps (146), Rase/Barrow, Project Engineering of Process Plants (147).
Nyström, J. Anm. av Kosmos, Bd 35, 1957 143
Paulson, S. Industriorientering för lärare. Referat av Industriens Upplysningstjänsts kurs 12—19 juni 1958 209
Pleijel, A. En förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i västra Sverige 207
— Anm. av Eggleston, Problems in Euclidean Space 288
von Proschwitz, K. Anm. av Nyhlén/Amundsson/Broman, Rymdgeometri för gymnasiet 212
Ramgard, A. Anm. av Hill, Statistical Mechanics (134), Zemansky, Heat and Thermodynamics (136), Mackey/Barnard/Ellenwood, Engineering Thermodynamics (137).
Ramqvist, T. Anm. av Wiltshire, A Further Handbook of Industrial Radiology 141
Riesel, H. Anm. av Murdoch, Linear Algebra for Undergraduates (211), Booth, Programming for an Automatic Digital Calculator (215).
Rosengren, C. Föreningen för matem. naturv. underv., årsmöte i Stockholm 7—8 jan. 1958 55
Rudberg, E. Anm. av Megaw, Ferroelectricity in Crystals (137), Guillet, Précis de métallographie (221).
Rydberg, J. Anm. av Errara, Chimie physique nucléaire appliquée 86
Råde, L. Anm. av Maxwell, An Analytical Calculus (58), Smith/Salkover/Justice, Calculus (287).
Saarnio, Aa. Centralrörelse 119
Samén, E. Anm. av Becker/Strack, Chemiefaserstoffe 234
Sihlbom, L. Anm. av Muldoon/Blake, Systematic Organic Chemistry .. 230
Slätis, H. Anm. av Graewe, Atomphysik 138
Staffansson, E. Anm. av Weber/White/Manning, Physics for Science and Engineering (63), Houstoun, Physical Optics (66), Jenkins/White, Fundamentals of Optics (295), Longhurst, Geometrical and Physical Optics (296).
Starck, G. Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar 3—4 jan. 1958 55
— En bestämning av smältpunkten för tenn. Ett tillägg 207
Stenström, V. Anm. av Gouyon, Précis de mathématiques spéciales 130

Storm, E. Anm. av Mörtstedt, Teknisk värmelära (87), Lundberg, Hydromaskinlära (166).
Stål, I. Referat av kurs i kemi 23—28 juni 1958 208
Svartholm, N. Anm. av Cullwick, Electromagnetism and Relativity 135
Svenonius, B. Anm. av Kalaja, Atlas över norra stjärnhimlen för Skandinavien (149), Wallenquist, Astronomi (232).
Tandberg, J. Anm. av Parck, Imitation av lyxvaror. Kemisk teknik i Egypten under antiken 149
Trane, Hj. En rättvänd bild på näthinnan uppfattas som omvänd 205
Walles, E. Tröghetskrafter i skolfysiken 114
Wilner, T. Klangfigurer och atomfysik 41
— Elektrolytiska elmätare 206
Wranglén, G. Anm. av Kortüm, Lehrbuch der Elektrochemie 73
Åström, H. Anm. av Dislocations and Mechanical Properties of Crystals. Conference at Lake Placid, Sept. 6—8, 1956 217
Öberg, T. Approximativa tyngdpunktsformler 128
Ölander, A. Om talet 9^{9^9} 202

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 76, 150, 235, 301
Matem. och fysikaliska uppg. vid studentskrivningar och fyllnadsprövningar 1958: jan. (79) mars (152), aug. (238), nov. (304).
Provräkning i realexamen vt. och ht. 1958 ..... 160, 310
Praktisk realexamen vt. och ht. 1958: Uppg. för maskinteknisk linje i fysik (162, 313), i maskin- och byggnadslära (165, 315). Uppg. för kemisk-teknisk linje i kemi med laboratorieteknik (164, 314).

Under rubriken »Aktuellt»:
Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar 3—4 jan. 1958 (55); Föreningen för matem. naturv. undervisning, årsmöte i Stockholm i jan. 1958 (55); Föreningen i Lund för matem. naturv. underv., möte i i nov. 1957 (54); En förening för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i västra Sverige (207); Kurser för lärare under sommaren 1958: i fysik i Uppsala (208), i kemi i Stockholm (208). Studieresa anordnad av Industriens Upplysningstjänst (209).

Insänd litteratur 86, 167, 247, 316

Lund 1958, Håkan Ohlssons boktryckeri.

V. Uppgifter i fysik för maskinteknisk linje

1. Ett metallstycke hänges upp i en dynamometer, som därvid visar 41,0 pond. Nedsänkes metallstycket helt i vatten, visar dynamometern 35,0 pond. Man sänker nu ned metallstycket helt i en annan vätska och avläser på dynamometern 36,5 pond. Beräkna den sistnämnda vätskans täthet.
2. Mitt över en gata hänger en lampa i en wire, vars båda ändar är fästade i två punkter, som befinner sig i jämnhöjd med varandra och på 16 m inbördes avstånd. Lampans fästpunkt i wiren befinner sig 2 m lägre än wireändarnas fästpunkter. Lampan väger 20 kg. Beräkna den dragkraft i wirens båda delar, som lampans tyngd förorsakar.
3. En buss startar från en hållplats med likformigt accelererad rörelse (a=1,5 m/sek^2), går en viss sträcka med den konstanta hastigheten 12 m/sek och bromsar in med retardationen 1,0 m/sek^2 och stannar vid nästa hållplats, belägen 300 m från den förra. Beräkna den tid bussen behövt för att tillryggalägga sträckan mellan de båda hållplatserna.
4. En syrgastub, vars volym är 10 l, innehåller 1 kg syrgas. Hur stort är trycket i tuben, då syrgasens täthet vid ett tryck av 1 kp/cm^2 och vid ifrågavarande temperatur är 1,35 kg/m^3?
5. Ett termoskärl innehåller vatten och is med en sammanlagd vikt av 400 g. Man tillsätter 300 g vatten, vars temperatur är 80° C, varvid blandningstemperaturen blir 10° C. Hur många gram is fanns från början i kärlet? Man bortser vid beräkningarna från kärlets värmekapacitet (»vattenvärde»). Isens smältvärme är 80 cal/g.
6. De elektriska ledningarna i en våning är säkrade för maximalt 6 A. Hur många 60 watts lampor kan man högst parallellkoppla till nätet utan att den maximalt tillåtna strömstyrkan överskrids? Polspänningen är 220 V.
7. Till polerna av ett batteri med emk=6,0 V och inre resistansen 0,4 ohm anslutes en konstantantråd med 0,5 mm^2 genomskärningsyta. Hur lång skall tråden tagas, då man vill, att batteriets polspänning skall vara 5,0 V? Resistiviteten för konstantan är 0,50.
8. Värmespiralen i en kokplatta utgöres av en 16 m lång tråd med 0,5 mm^2 genomskärningsyta och resistiviteten 0,40. Då plattan anslutes till nätspänningen 220 V, kan man med plattan på 60 sek värma upp 1 liter vatten från 20° C till 60° C. Beräkna plattans verkningsgrad.

Resultat: **1.** 0,75 g/cm^3. **2.** 41,2 kp. **3.** 35 sek. **4.** 74 kp/cm^2. **5.** 212,5 g. **6.** 22 st. **7.** 2 m. **8.** 73,5 %.

VI. Uppgifter i fysik för kemisk-teknisk linje

2. Vid elektrolytisk framställning av aluminium används en strömstyrka på 6000 A. Hur lång tid tar det att på detta sätt utvinna 2 ton aluminium? Metallen är trevärd, och dess atomvikt är 27,0. För utfällning av en gramekvivalent av ett ämne erfordras 96 500 coulomb.
3. Två tunna, konvexa linser med brännvidderna respektive 10 cm och 6 cm är uppställda med sammanfallande huvudaxlar på 28 cm avstånd från varandra. Ett lysande föremål placeras på huvudaxeln 20 cm framför den förstnämnda linsen. Var uppkommer slutbilden? Uppg. 1, 4–8 utgjorde uppg. med samma nr i V.

Resultat: 2. 993 tim. 3. 24 cm bakom den senare linsen.

VII. Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. Angiv kemiska formler för följande ämnen: a) kvarts, b) mönja, c) brunsten, d) natriumklorat, e) kaliumbikromat, f) klorkalk, g) blyglans, h) flusspat.
2. Angiv kemiska reaktionsformler, då följande ämnen reagerar med varandra:

   a) zink och utspädd svavelsyra,
   b) silver och utspädd salpetersyra,
   c) aluminiumklorid och natronlut i överskott

   samt bestäm koefficienterna i följande reaktionsformel:

$$KMnO_4 + Zn + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + ZnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O.$$

3. Redogör för hur man, med luft och vatten som utgångsmaterial, kan framställa salpetersyra.
4. En vattenlösning innehåller följande joner:

$$SO_4^{2-},\ Cl^-,\ PO_4^{3-},\ CO_3^{2-} \text{ och } H_4N^+.$$

   Hur kan man kvalitativt påvisa dessa joner?
5. Hur framställes: a) dietyleter, b) glycerin, c) acetaldehyd, d) glykos? Angiv även formler för respektive ämnen.
6. Angiv namn, kemiska formler och strukturformler för två organiska föreningar, som förekommer i stenkolstjära, samt deras användning.
7. En förening gav vid analys 35,0 % kväve, 5,0 % väte och resten syre. Beräkna föreningens enklaste formel.
8. 1,7 g oren natriumhydroxid löses i vatten, varefter lösningen utspädes till 500 ml. Vid titrering visade sig lösningen vara 0,08 N med avseende på NaOH. Beräkna a) hur många procent ren NaOH den orena natriumhydroxiden innehåller, b) hur många ml 0,5 N NaOH-lösning, som skall sättas till 100 ml 0,08 N NaOH, för att erhålla 0,1 N lösning av NaOH.

9. För framställning av kristalliserat kopparnitrat användes koppar och salpetersyra. Hur många ml 2 M salpetersyra erfordras teoretiskt för framställning av 10,0 g kristalliserat kopparnitrat $Cu(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$, om man förutsätter, att kväveoxid bildas?
10. För bestämning av halten formaldehyd HCHO i en lösning försättes 5,0 ml av densamma med 40,0 ml 0,24 N jodlösning. Reaktionsblandningen göres svagt alkalisk med NaOH och omskakas. Härvid oxideras formaldehyden till myrsyra enligt reaktionen: $HCHO + J_2 + H_2O \rightarrow HCOOH + 2HJ$. För bestämning av överskott jod surgöres lösningen med utspädd saltsyra, varefter den frigjorda joden titreras med tiosulfat. Härvid förbrukas 12,60 ml 0,1 N $Na_2S_2O_3$-lösning. Beräkna hur många gram HCHO, som finns i 100 ml lösning.
Atomvikter: C=12,0 Cu=63,6 J=126,9 N=14,0 Na=23,0 S=32,1

Resultat: 7. $N_2H_4O_3 = NH_4NO_3$. 8. a) 94 %, b) 5 ml. 9. 45 ml. 10. 2,50 g.

VIII. Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskinteknisk linje

1. Dimensionera en kort gjutjärnspelare med symmetriskt korsformigt tvärsnitt för en belastning av 65 Mp. Hela flänshöjden tvärs över göres 7 gånger flänstjockleken. Gjutjärnets brottgräns är 7200 kp/cm². Säkerhetsfaktorn=9.
2. Hur stor blir tryckpåkänningen i stansen vid stansning av ett hål i en 12 mm plåt, vars brottskjuvspänning är 3000 kp/cm², om hålet har formen av en halvcirkel med 40 mm diameter?
3. En cistern vilar på 4 st 5,5 m höga ben bestående av UNP 14. Hur stor får sammanlagda vikten av cistern och innehåll högst vara, om benen beräknas för knäckning och 10-faldig säkerhet erfordras?
4. En ihålig axel, vars innerdiameter är 80 % av ytterdiametern, skall med samma tillåtna vridpåkänning och i övrigt samma förhållanden ersätta en massiv axel med 60 mm diameter. Beräkna den ihåliga axelns dimensioner.
5. En I-balk på 4,6 m längd är fritt upplagd i båda ändar och utsatt för dels en på balkens mitt anbringad kraft på 1 Mp, dels en jämnt fördelad belastning på 2,2 Mp. Böjpåkänningen är 900 kp/cm². Välj lämplig I-balk. Egenvikten försummas.
6. En kran lyfter 5 t med en hastighet av 1,2 m/s. Kranen drives av en elmotor, som har 85 % verkningsgrad. Hur stor effekt i kW skall tillföras motorn, om lintrumman, utväxlingen och blocken tillsammans har en verkningsgrad av 68 %? Rita figur.
7. En koleldad ångpanna levererar 1 ton ånga/h av 13 atö och 250° C. Matarvattnets temperatur är 60° C. Kolens effektiva värmevärde= 7200 kcal/kg. Pannans verkningsgrad =70 %. Beräkna kolförbrukningen per timme.

8. En dieselmotor med 35 % verkningsgrad driver en elgenerator, vars verkningsgrad är 88 %. Generatorns avgivna effekt är 120 kW. Oljans effektiva värmevärde är 11 000 kcal/kg, och priset är 16 öre/kg. Den årliga kostnaden för ränta, avskrivning och amortering är 15 % av anläggningens anskaffningskostnad, som är 40 000 kronor. Kostnaden för skötsel, smörjoljor m. m. beräknas till 8 kronor/driftsdygn. Anläggningen är i drift 300 dygn per år med 9 driftstimmar per dygn. Beräkna självkostnadspriset per kWh.

Resultat: 1. Tjocklek 25 mm, höjd 175 mm. 2. 5900 kp/cm². 3. Ca 1700 kg. 4. Yttre och inre diameter resp. 72 mm och 57 mm. 5. INP22. 6. 102 kW. 7. 127 kg/h. 8. 6,7 öre/kWh.

Insänd litteratur. Forts. från annonsbladet vid sid. 261.

S. Skarbäck, *Studentuppg. med lösningar.* Reall., allm. kurs aug. 1954— h.t. 1957 samt proven enl. nya gymnasiereformen v.t. 1957— h.t. 1957. 186 s., kr. 12: 50. — Specialmatem. jan. 1953—h.t. 1957. 207 s., kr. 13: 50. Almqvist & Wiksell. Stockholm 1958.

R. Thiel, *Och det vart ljus.* Övers. från tyskan av Tor Larsson. Bonniers, Stockholm, 1958, 363 s., kr. 38: 50.

Den nya astronomien, En »Scientific American Book» översatt av docent Aina Elvius. Andra uppl. Natur & Kultur, Stockholm, 1958, kr. 18: 50.

Universum, En »Scientific American Book» översatt av P.-I. Eriksson. Natur & Kultur, Stockholm, 1958, 172 s., kr. 18: 50.

Svenska Bokförlaget, Stockholm, 1958:

Helge Bohlin, *Ellära och elektroteknik.* 641 s., kr. 21: —.

Malmborg/Sundström, *Fysik för realskolan.* Årskurs I. 92 s., kr. 2: 75.

Hellsten/Frendel, *Fysik och astronomi.* 12:e uppl. utg. av Hj. Körner. 135 s.

Hedström/Rendahl/Ekbom, *Räknetabeller.* 16:e uppl., 50 s., kr. 4: —.

Hedström/Öije, *Laborationsövningar i matematik.* 14 s., kr. 2: —.

Falck/Hammarsten m. fl., *Realskolans biologi.* 322 s., kr. 9: 85.

Abrahamsson/Forsén/Gandahl, *Matematik för enhetsskolan.* Klass 7. Aritmetik och algebra. 150 s., kr. 4: 25.

Sandström/Ullemar, *Geometri för realskolan och enhetsskolan.* Alternativkurs 2. 51 s., kr. 2: 85. — För enhetsskolans alternativkurs 1 och realskolans särskilda kurs. 97 s., kr. 3: 90.

Beckman/Wetterblad/Lindahl, *Fysik för enhetsskolan* III. Kursen för kl. 9: Alternativkurs 1 och 2, resp. 90 s., kr. 4: 25 och 140 s., kr. 5: 85.

Ekman/Sandström, *Oorganisk kemi.* För realskolans näst högsta klass. 78 s., kr. 2: 25. — *Organisk kemi.* För realskolans avslutningsklass samt latingymnasiets och allm. linjens första ringar. 50 s., kr. 1: 80.

Almkvist/Knave/Lindholm, *Fysik för enhetsskolan och realskolan.* Ellära och akustik. 68 s., kr. 2: 65. — *Fysik för realskolan.* Första årskursen. 93 s., kr. 3: 90.

Almkvist/Knave, *Fysiklaborationer för realskolan.* Första årskursen. Allm. fysik, värmelära, optik. 22 s., kr. 1: 50. — För enhetsskolan kl. 7. Optik, allm. fysik, astronomi 22 s., kr. 1: 50.

Ny upplaga

av

Helge Bohlin

ELEKTRICITETSLÄRA och ELEKTROTEKNIK

7:e omarbetade upplagan. Inb. 21:—

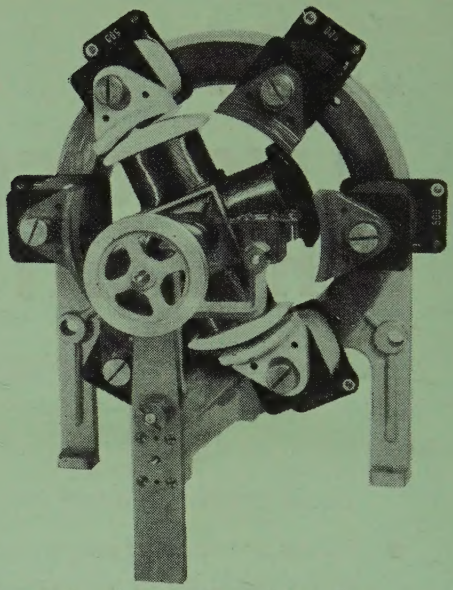
Bland nyheterna i denna upplaga kan nämnas:

- I slutet av boken har inlagts ett kapitel om användningen av komplexa tal för beräkning av växelströmskretsar.
- Framställningen åtföljes av ett antal i texten inlagda, genomräknade exempel och en samling problem med facit vid kapitlets slut.
- Kapitlet »Elektromagnetiska vågor» har utökats med ett avsnitt om halvledare och transistorer.
- MKSA-systemets enheter har konsekvent genomförts.

B
F
SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN
David Bagaresgata 20, Stockholm C · Postgiro 55 160
UTSTÄLLNING · LÄRAREXEMPLAR · REKVISITIONER
Utställning även Göteborg, Parkgatan 19
Malmö, Hamngatan 4 · *Linköping*, Klostergatan 26
Luleå, Tullgatan 16 · *Sundsvall*, Rådhusgatan 37

Dr CLEMENZ' BYGGSATSER



Med ensamrätt för Skandinavien säljer Norstedts Skolavdelning Dr. Clemenz' byggsatser, den bästa materiel som hittills konstruerats för den grundläggande undervisningen i elektriska motorer, generatorer och mätinstrument.

Den såväl tekniskt som pedagogiskt riktiga utformningen borgar för goda resultat även då mera komplicerade maskiner byggs, och modellerna fungerar som riktiga maskiner skall göra.

Endast en demonstration kan dock göra materielen full rättvisa. Ring eller skriv till Norstedts Skolavdelning i Stockholm, Göteborg eller Malmö och bestäm tid för en demonstration. Våra representanter står till tjänst med alla nödvändiga upplysningar.

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

Stockholm Göteborg Malmö Linköping Sundsvall

Lund 1958, Håkan Ohlssons Boktryckeri

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

FYRTIOANDRA ÅRGÅNGEN

1959

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16⁴ STOCKHOLM